Вариант № 1 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 3\,x_1 & -\,x_2 & & -2\,x_4 & = & 2 \\ & -\,x_2 & -\,x_3 & -\,x_4 & = & 4 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & = & -8 \\ 2\,x_1 & & +\,x_3 & -\,x_4 & = & -2 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} & -3\,x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & -4\,x_5 & = & 18 \\ x_1 & -\,x_2 & +4\,x_3 & & -4\,x_5 & = & 5 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & -4\,x_3 & & -2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & & -2\,x_5 & = & 6 \\ -\,x_1 & & -4\,x_3 & & +10\,x_5 & = & -14 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 2\,x_1 & -\,x_2 & -\,x_3 & -2\,x_4 & -5\,x_5 & = & 0 \\ -3\,x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & +\,x_5 & = & 0 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & -4\,x_3 & & -4\,x_5 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -3\,x_2 & +2\,x_3 & -4\,x_4 & -6\,x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +2\,y & & = & 2 \\ -\,x & & & = & 2 \\ -2\,x & -\,y & +\,z & = & 1 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & p \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-13x_1 + 6x_2 - 6x_3, -12x_1 + 5x_2 - 6x_3, +18x_1 - 9x_2 + 8x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 36 & -11 & 20 \\ 18 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -2, 2)^T, \vec{f_2} = (-2, 6, -1)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, -1)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (-4, 13, -5)^T, \vec{f_3} = (-6, 2, 10)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 2 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -7 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -16 \\ - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 13 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_5 = 0 \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -10 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -13 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 20 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 22x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} + y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 2z = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & p \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 0, 2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 2, 0)^T, \vec{f_2} = (0, -6, 1)^T, \vec{f_3} = (2, -1, -1)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (-2, 1, -5)^T, \vec{f_3} = (1, 2, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 3 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -9 \\ -x_1 - 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -17 \\ +2x_2 + x_3 + x_4 = -8 \\ -2x_2 - x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 1 \\ -2x - 2y - z = 2 \\ 5x + 6y + 4z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & -10 & -12 \\ -1 & 1 & -4 & p & -8 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -7, -9) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 3, 2)^T, \vec{f_2} = (2, 1, 1)^T, \vec{f_3} = (0, 2, 1)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -5, -3)^T, \vec{f_2} = (26, 55, -57)^T, \vec{f_3} = (-9, -3, -7)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 4 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_1 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ -x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = & 11 \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & -9 \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & & -x_3 & -2x_4 & & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & & -2x_5 & = & 1 \\ -3x_1 & -2x_2 & -6x_3 & -4x_4 & -2x_5 & = & 32 \\ & +x_2 & & -x_4 & -4x_5 & = & 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +9x_4 & = & 0 \\ -5x_1 & -4x_2 & +x_3 & -17x_4 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -7x_1 & -6x_2 & +x_3 & -25x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & & -2z & = & 2 \\ -x & +2y & +z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & p \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-2x_1, -2x_2, -2x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -6 \\ 6 & -4 & -3 \\ 18 & -6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы: $\vec{f_1} = (-1, 2, 2)^T, \vec{f_2} = (-4, 4, 5)^T, \vec{f_3} = (-2, 3, 3)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы: $\vec{f_1} = (-4, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (5, 18, 17)^T, \vec{f_3} = (-6, -4, 6)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 5 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 18 \\ -2\,x_1 - 2\,x_2 - 5\,x_3 - x_4 = -21 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_4 = 8 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 3\,x_4 = 22 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 10 \\ -2\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 - 2\,x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 7 \\ -2\,x_1 - x_2 + 8\,x_3 - 4\,x_4 + 4\,x_5 = -32 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 - 2\,x_3 + 10\,x_4 = 0 \\ -6\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 - 17\,x_4 = 0 \\ 3\,x_1 - x_2 - x_3 + 5\,x_4 = 0 \\ 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x - z = -2 \\ -4\,x + y + 3\,z = -3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & p \\ -8 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (7, 4, 4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -43 & 12 & 36 \\ -52 & 13 & 48 \\ -34 & 10 & 27 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -2, -5)^T, \vec{f_2} = (2, 1, -3)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, 2)^T, \vec{f_2} = (22, -19, 5)^T, \vec{f_3} = (-4, -2, 10)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 6 .

1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ -6 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 12 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -10 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_3 + 3x_4 = 0 \\ +3x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ +3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -4x + 4y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = -3 \\ 3x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & 0 & -2 & -4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & -4 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & -6 & -8 \\ -7 & -5 & -6 & p & 12 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, 5, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 4, -2)^T, \vec{f_2} = (0, 7, -1)^T, \vec{f_3} = (2, -5, 3)^T$ и $\vec{a} = (-3, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, -3)^T, \vec{f_2} = (5, 22, 18)^T, \vec{f_3} = (-6, 3, -2)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 7 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -1$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & -2\,x_4 & = & 8 \\ -2\,x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & -3\,x_4 & = & 10 \\ -x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & & = & 4 \\ & & +x_3 & -x_4 & = & 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +3\,x_4 & = & -9 \\ 3\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & -3\,x_4 & = & 7 \\ -2\,x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -1 \\ x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & -9\,x_4 & = & 25 \\ -x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & +2\,x_4 & = & -6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & -3\,x_2 & +x_3 & -2\,x_4 & -6\,x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & -x_3 & -2\,x_4 & -6\,x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -4\,x_2 & +2\,x_3 & & -3\,x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +6\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & +6\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & +y & -2\,z & = & -1 \\ & +2\,y & +z & = & 1 \\ 2\,x & -2\,y & +3\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & p \\ -2 & 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (12x_1 - 10x_2, 15x_1 - 13x_2, -12x_1 + 12x_2 + x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -43 & -22 & 14 \\ 68 & 35 & -22 \\ -24 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-6, 7, -5)^T, \vec{f_2} = (-3, 5, -2)^T, \vec{f_3} = (-2, 3, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 0, 4)^T, \vec{f_3} = (0, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 8 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & 7 & 4 \\ -8 & 8 & -5 & -5 \\ -4 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_4 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & = & -16 \\ 7\,x_1 & -6\,x_2 & +7\,x_3 & +4\,x_4 & = & -34 \\ -8\,x_1 & +8\,x_2 & -5\,x_3 & -5\,x_4 & = & 30 \\ -4\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & -\,x_4 & = & 10 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -\,x_2 & & +2\,x_4 & = & 3 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 8 \\ -10\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & = & 2 \\ 11\,x_1 & -5\,x_2 & +6\,x_3 & -2\,x_4 & = & -13 \\ x_1 & -\,x_2 & +3\,x_3 & -4\,x_4 & = & -11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & -3\,x_4 & +18\,x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & -\,x_4 & -2\,x_5 & = & 0 \\ 6\,x_1 & -3\,x_2 & +5\,x_3 & -5\,x_4 & +34\,x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +\,x_2 & & -\,x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & +\,y & -\,z & = & -2 \\ x & -3\,y & -2\,z & = & -3 \\ x & -4\,y & -2\,z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & p \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 0, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & -12 \\ -18 & -12 & -21 \\ 18 & 10 & 19 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, 1)^T, \vec{f_2} = (3, -6, 2)^T, \vec{f_3} = (-1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (3, -3, 0)^T, \vec{f_3} = (1, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 9 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2\,x_1 & -2\,x_2 & -2\,x_3 & +\,x_4 & = & 6 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & +5\,x_3 & -3\,x_4 & = & -6 \\ 3\,x_1 & -3\,x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & = & 6 \\ 3\,x_1 & -3\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 8 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} -\,x_1 & -5\,x_2 & +2\,x_3 & +2\,x_4 & = & -21 \\ & +5\,x_2 & -\,x_3 & -\,x_4 & = & 17 \\ -2\,x_1 & -6\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & = & -28 \\ x_1 & +10\,x_2 & -3\,x_3 & -3\,x_4 & = & 38 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} -\,x_1 & -5\,x_2 & +2\,x_3 & & -18\,x_5 & = & 0 \\ & +6\,x_2 & -\,x_3 & +2\,x_4 & +19\,x_5 & = & 0 \\ -2\,x_1 & -6\,x_2 & +3\,x_3 & -3\,x_4 & -23\,x_5 & = & 0 \\ -2\,x_1 & -4\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & -17\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & -18\,x_2 & +7\,x_3 & -8\,x_4 & -65\,x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{lrrcr} 4\,x & -3\,y & -3\,z & = & 1 \\ 2\,x & & -\,z & = & -3 \\ 7\,x & -6\,y & -6\,z & = & -3 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} & 4 & -3 & 1 \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & 4 & -2 & -5 \\ 19 & 4 & 12 & -8 & -3 \\ -20 & -5 & -12 & p & 9 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, -4, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -102 & -28 & 66 \\ 194 & 54 & -123 \\ -74 & -20 & 49 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (2, -4, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 3)^T$ и $\vec{a} = (-1, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (3, -3, -4)^T, \vec{f_3} = (2, -2, 3)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 10 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ & -x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -10 \\ & +2x_2 & +5x_3 & -x_4 & = & 13 \\ x_1 & -3x_2 & -3x_3 & & = & -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 8 \\ -6x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -20 \\ -16x_1 & +10x_2 & -6x_3 & & = & -36 \\ -x_1 & +x_2 & & +3x_4 & = & -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & +17x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & -28x_5 & = & 0 \\ -4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -26x_5 & = & 0 \\ x_1 & & -2x_3 & & +8x_5 & = & 0 \\ 10x_1 & -9x_2 & -10x_3 & -7x_4 & +82x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & -2y & -2z & = & 1 \\ & +2y & +z & = & 2 \\ & -y & -z & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & p \\ 4 & -5 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (14x_1 + 12x_2 - 20x_3, 24x_1 + 26x_2 - 40x_3, +24x_1 + 24x_2 - 38x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 15 & -12 & 24 \\ -24 & 21 & -40 \\ -24 & 18 & -37 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 4, 5)^T, \vec{f_2} = (0, -1, -3)^T, \vec{f_3} = (1, 3, 4)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (16, 18, 22)^T, \vec{f_3} = (-12, -4, 12)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 11 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & -3 \\ 4 & -3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 & -4\,x_2 & -5\,x_3 & -3\,x_4 & = & 9 \\ 4\,x_1 & -3\,x_2 & -8\,x_3 & -3\,x_4 & = & 20 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & -2\,x_3 & & = & 6 \\ 3\,x_1 & -3\,x_2 & -4\,x_3 & -2\,x_4 & = & 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & +2\,x_2 & +\,x_3 & -3\,x_4 & -\,x_5 & = & -1 \\ 2\,x_1 & -6\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & -3\,x_5 & = & -25 \\ -\,x_1 & +3\,x_2 & +2\,x_3 & -2\,x_4 & +2\,x_5 & = & 8 \\ 2\,x_1 & -10\,x_2 & -5\,x_3 & +4\,x_4 & -\,x_5 & = & -23 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & & +2\,x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -\,x_2 & & -3\,x_4 & = & 0 \\ & +\,x_2 & -\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -\,x_2 & -4\,x_3 & -3\,x_4 & = & 0 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & -\,x_3 & +6\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -\,x & & +2\,z & = & -2 \\ x & -\,y & & = & 0 \\ & +\,y & -\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & p \\ 3 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, -4, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (0, -3, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 3, -1)^T, \vec{f_2} = (-8, 9, 11)^T, \vec{f_3} = (3, -1, 3)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 12 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & -22 \\ 2x_1 & +6x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = & 23 \\ & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & -22 \\ -2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & -25 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & -2 \\ -4x_1 & +2x_2 & -5x_3 & & +4x_5 & = & -10 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & -3x_4 & +x_5 & = & 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & -2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & -3x_2 & -x_3 & -7x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x & +2y & & = & -2 \\ 4x & +3y & -3z & = & -1 \\ & +y & +z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & -3 & 3 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 5 & p & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (4, -9, 6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -14 \\ 6 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 0, 0)^T, \vec{f_2} = (2, 2, -1)^T, \vec{f_3} = (0, -1, 1)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 1, -3)^T, \vec{f_2} = (-10, 43, 1)^T, \vec{f_3} = (5, 1, 7)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 13 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 4 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -2$ и $k_3 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +2x_4 & = & -1 \\ -x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & & -x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +3x_4 & = & -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 12 \\ -x_1 & +x_2 & -5x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 10 \\ 2x_1 & & & -x_4 & +2x_5 & = & -3 \\ -2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & 27 \\ & -2x_2 & +10x_3 & -3x_4 & -6x_5 & = & -17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & +7x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & & +4x_5 & = & 0 \\ 7x_1 & +5x_2 & -x_3 & -4x_4 & +10x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x & +3y & +z & = & -1 \\ 4x & +7y & +3z & = & -2 \\ 3x & +4y & +2z & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 7 & 5 & -6 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & p \\ 1 & -1 & -5 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-14x_1 + 6x_2 + 24x_3, 4x_1 - 4x_2 - 8x_3, -8x_1 + 4x_2 + 14x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ -4 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (-2, -3, -3)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, -3, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (-5, 1, 4)^T, \vec{f_3} = (1, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (3, 0, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 14 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_1 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \\ +4x_2 + x_4 = -16 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 14 \\ +3x_2 + 2x_3 + x_4 = -14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -9 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -14 \\ +2x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 13 \\ -4x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 7x_5 = -32 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} +x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x - y - 2z = 2 \\ -2y - z = -1 \\ -z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & p \\ -2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, -9, 2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 20 & -9 & 36 \\ -6 & 5 & -12 \\ -12 & 6 & -22 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (5, 8, 4)^T, \vec{f_2} = (2, 6, 1)^T, \vec{f_3} = (-1, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -3, -1)^T, \vec{f_2} = (10, 13, -19)^T, \vec{f_3} = (5, 2, 4)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 15 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & -7 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad +2\,x_2 \; -2\,x_3 \; -x_4 = -13 \\ x_1 +2\,x_2 -4\,x_3 = -17 \\ -2\,x_1 +4\,x_2 -7\,x_3 -3\,x_4 = -31 \\ x_1 -3\,x_2 +3\,x_3 +2\,x_4 = 19 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4\,x_1 -2\,x_2 + x_3 -4\,x_4 +2\,x_5 = 6 \\ 5\,x_1 +3\,x_2 -2\,x_3 -2\,x_4 -2\,x_5 = 7 \\ 9\,x_1 +5\,x_2 -3\,x_3 +2\,x_4 -4\,x_5 = 1 \\ -14\,x_1 -8\,x_2 +5\,x_3 +6\,x_5 = -8 \\ 3\,x_1 + x_2 +10\,x_4 -2\,x_5 = -19 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 -2\,x_2 +6\,x_4 = 0 \\ 2\,x_1 - x_3 +2\,x_4 = 0 \\ -3\,x_2 + x_3 +8\,x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + y +2\,z = 1 \\ x -3\,y -2\,z = 0 \\ -z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 3 & -3 & 1 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -7 & p & -2 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -9, 5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 14 \\ 6 & -3 & -24 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -5, 2)^T, \vec{f_2} = (0, -1, 1)^T, \vec{f_3} = (-2, 4, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (-15, 4, -33)^T, \vec{f_3} = (-10, 12, 6)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 16 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & 7 & 2 \\ -3 & -1 & 8 & 2 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 19 \\ -3x_1 + 7x_3 + 2x_4 = -25 \\ -3x_1 - x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -25 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -23 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -15 \\ -3x_1 + 7x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 22 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 22 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 26 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 17x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x = -1 \\ -x + 2z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & p \\ -4 & -4 & -1 & 14 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (5x_1 + 6x_2 + 6x_3, -7x_1 - 8x_2 - 6x_3, +4x_1 + 4x_2 + 2x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 8 & 8 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 3, 3)^T, \vec{f_2} = (-1, 3, 2)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 2, 2)^T, \vec{f_2} = (-16, 29, -5)^T, \vec{f_3} = (-8, -2, 14)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 17 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & -6 & 5 & -5 \\ -4 & -5 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_3 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & = & -3 \\ -6\,x_1 & -6\,x_2 & +5\,x_3 & -5\,x_4 & = & 3 \\ -4\,x_1 & -5\,x_2 & +5\,x_3 & -3\,x_4 & = & 1 \\ -2\,x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & -3\,x_4 & = & -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & -3\,x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & +2\,x_5 & = & 8 \\ & -\,x_2 & +\,x_3 & +\,x_4 & +2\,x_5 & = & 10 \\ 3\,x_1 & -4\,x_2 & +2\,x_3 & +2\,x_4 & -\,x_5 & = & 19 \\ 4\,x_1 & -7\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & +6\,x_5 & = & 26 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ -6\,x_1 & +6\,x_2 & -5\,x_3 & -16\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -4\,x_2 & +4\,x_3 & +10\,x_4 & = & 0 \\ & +2\,x_2 & -\,x_3 & -8\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3\,x & -2\,y & +2\,z & = & 2 \\ -6\,x & +6\,y & -5\,z & = & 1 \\ x & & & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & p \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -4, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ -42 & -14 & 16 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 2, 0)^T, \vec{f_2} = (2, -8, -1)^T, \vec{f_3} = (2, -3, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (-2, -1, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 18 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -1$ и $k_2 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -9 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -8 \\ -3x_2 - x_4 = -14 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -8 \\ +x_2 - 4x_3 + 2x_5 = -12 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -28 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 + x_4 + 2x_5 = -32 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 28x_4 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 32x_4 = 0 \\ -9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 48x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} +3y - z = 1 \\ x + y = -3 \\ x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & 2 & -4 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & -5 & -5 & -5 \\ -1 & 1 & -7 & -1 & -9 \\ -10 & -2 & 8 & p & 6 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, -7, -6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -35 & 0 & -24 \\ 64 & -3 & 48 \\ 48 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 4, -1)^T, \vec{f_2} = (2, 0, 4)^T, \vec{f_3} = (0, -3, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (20, -3, -9)^T, \vec{f_3} = (3, 2, 6)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 19 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -3$ и $k_3 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -2\,x_2 & -4\,x_3 & -2\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & -2\,x_3 & -\,x_4 & = & 5 \\ & -\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & = & -3 \\ 2\,x_1 & -\,x_2 & -3\,x_3 & -\,x_4 & = & 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & -4\,x_4 & = & -26 \\ -\,x_1 & & & +2\,x_4 & = & 2 \\ & +3\,x_2 & -\,x_3 & -2\,x_4 & = & -16 \\ -3\,x_1 & +8\,x_2 & -4\,x_3 & -6\,x_4 & = & -50 \\ x_1 & +6\,x_2 & -2\,x_3 & -6\,x_4 & = & -34 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & -\,x_4 & -7\,x_5 & = & 0 \\ -\,x_1 & -5\,x_2 & & & +17\,x_5 & = & 0 \\ & +3\,x_2 & -\,x_3 & +\,x_4 & -6\,x_5 & = & 0 \\ x_1 & -13\,x_2 & +4\,x_3 & +2\,x_4 & +31\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & -\,y & +\,z & = & -1 \\ x & -\,y & & = & 1 \\ x & & -2\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 5 & -2 & p \\ -2 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (6x_1 - 6x_2 + 12x_3, -12x_1 + 13x_2 - 24x_3, -12x_1 + 12x_2 - 23x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 27 & 12 & -12 \\ 0 & -1 & 0 \\ 56 & 24 & -25 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (5, -4, 6)^T, \vec{f_2} = (-3, 3, -4)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -2, -2)^T, \vec{f_2} = (-4, -20, 14)^T, \vec{f_3} = (8, 4, 8)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 20 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_3 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & +2x_4 & = & -4 \\ x_1 & +6x_2 & -3x_3 & & = & -6 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = & 0 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & -6x_4 & = & 8 \\ -2x_1 & -2x_2 & & -2x_4 & = & 4 \\ -x_1 & -4x_2 & -6x_3 & -10x_4 & = & 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +4x_2 & -x_3 & -3x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & +6x_2 & -3x_3 & -4x_4 & -9x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -5x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & & -2x_4 & & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & -y & +2z & = & 1 \\ 3x & +5y & -5z & = & -2 \\ -x & & -z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & p \\ -1 & 3 & -7 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -5, 4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -12 & -4 & -6 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 2, -2)^T, \vec{f_2} = (3, -1, 4)^T, \vec{f_3} = (2, -3, 3)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 3, -1)^T, \vec{f_2} = (0, 1, 3)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 21 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & 7 & 2 \\ -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad -3x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -12 \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 16 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -12 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -16 \\ 11x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -28 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 9x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_5 = 0 \\ \quad 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 11x_5 = 0 \\ \quad -x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ \quad 4y + z = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & -3 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ 6 & -9 & -8 & p & -6 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -2, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 21 & -6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -3 & -21 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 4, -3)^T, \vec{f_2} = (2, 1, -1)^T, \vec{f_3} = (0, -2, 1)^T$ и $\vec{a} = (0, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (2, -4, 0)^T, \vec{f_3} = (-8, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 22 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_3 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 & +2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ -5x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 5 \\ -5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = & 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 16 \\ -x_1 & & +2x_3 & & = & -7 \\ -4x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & -23 \\ 2x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & 9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & & -2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & -6x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & +5x_2 & -x_3 & -3x_4 & -10x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & -2y & +z & = & 1 \\ -2x & & & = & -3 \\ & -3y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -7 \\ -5 & 1 & 2 & p \\ -4 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-30x_1 - 16x_2 + 8x_3, 48x_1 + 26x_2 - 12x_3, -16x_1 - 8x_2 + 6x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 3, 2)^T, \vec{f_2} = (-1, 2, 0)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, -1)^T, \vec{f_2} = (10, -8, 16)^T, \vec{f_3} = (16, 4, -8)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 23 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -3\,x_2 & +4\,x_3 & -2\,x_4 & = & -7 \\ x_1 & & & & = & 2 \\ & & & -\,x_4 & = & 2 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & = & -6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & -2\,x_4 & +3\,x_5 & = & 17 \\ -3\,x_1 & +8\,x_2 & -4\,x_3 & +3\,x_4 & +4\,x_5 & = & 52 \\ & +2\,x_2 & -\,x_3 & -4\,x_4 & -\,x_5 & = & -2 \\ -5\,x_1 & +14\,x_2 & -8\,x_3 & -\,x_4 & +10\,x_5 & = & 86 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & -5\,x_4 & = & 0 \\ -3\,x_1 & +7\,x_2 & -4\,x_3 & -11\,x_4 & = & 0 \\ & +2\,x_2 & -\,x_3 & -5\,x_4 & = & 0 \\ -4\,x_1 & +10\,x_2 & -6\,x_3 & -16\,x_4 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -3\,x_2 & +2\,x_3 & +\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -3\,x & -4\,y & -\,z & = & 1 \\ -5\,x & -5\,y & -3\,z & = & 2 \\ 4\,x & +5\,y & +2\,z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & p \\ 4 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 0, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -12 & -13 & -1 \\ 10 & 9 & 2 \\ 20 & 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 1, -3)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 1, 2)^T, \vec{f_2} = (1, 7, -4)^T, \vec{f_3} = (3, -1, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 24 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_2 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -5\,x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & = & 32 \\ 4\,x_1 & -5\,x_2 & -5\,x_3 & +3\,x_4 & = & 39 \\ 2\,x_1 & -4\,x_2 & & +\,x_4 & = & 22 \\ x_1 & -3\,x_2 & & & = & 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & -3\,x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 5 \\ -5\,x_1 & -6\,x_2 & -2\,x_3 & & & = & -12 \\ -3\,x_1 & -3\,x_2 & & -2\,x_4 & +2\,x_5 & = & -17 \\ 3\,x_1 & +3\,x_2 & & +2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -3\,x_2 & +2\,x_3 & -16\,x_4 & = & 0 \\ -6\,x_1 & +8\,x_2 & -5\,x_3 & +38\,x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -4\,x_2 & +3\,x_3 & -22\,x_4 & = & 0 \\ & +2\,x_2 & -\,x_3 & +6\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3\,x & & -2\,z & = & -2 \\ & -2\,y & -\,z & = & 1 \\ & +3\,y & +\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{-3} & -3 & 3 & 3 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & 4 & -2 & -3 \\ 25 & 10 & 10 & -8 & -9 \\ 26 & 11 & 11 & p & -9 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, 0, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -2, -4)^T, \vec{f_2} = (3, -3, -4)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 3)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -2, 1)^T, \vec{f_2} = (4, 5, 2)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 4)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 25 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -1$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} +3x_2 -2x_3 +x_4 = 6 \\ 3x_1 +x_2 -3x_3 -2x_4 = -3 \\ -2x_1 +5x_2 +x_3 +3x_4 = 11 \\ -2x_1 -x_2 +4x_3 +x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 -3x_2 -x_3 +x_4 -4x_5 = -8 \\ x_1 -x_2 -2x_3 -2x_5 = -7 \\ -3x_1 +4x_2 +3x_3 -2x_4 -3x_5 = -10 \\ 3x_1 -4x_2 -2x_3 +2x_4 -x_5 = 0 \\ x_1 -2x_2 +x_3 +2x_4 +7x_5 = 24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_2 +x_3 -2x_4 -2x_5 = 0 \\ x_1 -x_2 +3x_3 -x_4 -4x_5 = 0 \\ x_1 -5x_2 +5x_3 -5x_4 -8x_5 = 0 \\ 2x_1 -4x_2 +7x_3 -4x_4 -10x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2x -3y -3z = 1 \\ 4x +6y +5z = -1 \\ -x -2y -2z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & p \\ 4 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-20x_1 - 11x_2 - 27x_3, 18x_1 + 11x_2 + 24x_3, +8x_1 + 4x_2 + 11x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -26 & 0 & 36 \\ 12 & -2 & -18 \\ -18 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -2, 3)^T, \vec{f_2} = (3, -6, 2)^T, \vec{f_3} = (-3, 1, -2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, -2)^T, \vec{f_2} = (-4, -13, -6)^T, \vec{f_3} = (-4, 4, -6)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 26 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\; -x_2 \qquad\qquad -x_4 = -2 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 15 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ -5x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 27 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 - 6x_5 = -6 \\ -6x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 25 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ +3x_2 - x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 26x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 17x_4 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 1 \\ -3x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & p \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 5, -4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 \\ 12 & 3 & -9 \\ 12 & 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 1, -2)^T, \vec{f_2} = (0, 3, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, -1)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (-20, 6, 18)^T, \vec{f_3} = (-12, -4, -12)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 27 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & -3 \\ -5 & -4 & -8 & 4 \\ -4 & -4 & -2 & 3 \\ -5 & -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 & +4\,x_2 & +5\,x_3 & -3\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & -4\,x_2 & -8\,x_3 & +4\,x_4 & = & -7 \\ -4\,x_1 & -4\,x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 6 \\ -5\,x_1 & -5\,x_2 & -6\,x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & +2\,x_2 & -\,x_3 & -4\,x_4 & +\,x_5 & = & 6 \\ -2\,x_1 & -\,x_2 & -4\,x_3 & +3\,x_4 & +2\,x_5 & = & 19 \\ & +3\,x_2 & -6\,x_3 & -5\,x_4 & +4\,x_5 & = & 31 \\ 3\,x_1 & +3\,x_2 & +3\,x_3 & -7\,x_4 & -\,x_5 & = & -13 \\ x_1 & -\,x_2 & +5\,x_3 & +\,x_4 & -3\,x_5 & = & -25 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & +3\,x_2 & -\,x_3 & +2\,x_4 & = & 0 \\ -2\,x_1 & +6\,x_2 & -3\,x_3 & +9\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & -4\,x_2 & +2\,x_3 & -5\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & -2\,y & -\,z & = & 1 \\ & -3\,y & -\,z & = & -2 \\ x & -\,y & & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & -4 & -3 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} & -3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -11 & -9 & 9 \\ -7 & 8 & 10 & p & -9 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (4, 4, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 16 & -10 & -2 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -3, 2)^T, \vec{f_2} = (-1, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 0, 1)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 3, 2)^T, \vec{f_2} = (-11, 11, 0)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, 3)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 28 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & -11 \\ & -7\,x_2 & +4\,x_3 & +x_4 & = & 13 \\ & +3\,x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ 3\,x_1 & & +x_3 & +2\,x_4 & = & -15 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & +2\,x_5 & = & -8 \\ 4\,x_1 & +3\,x_2 & -x_3 & +3\,x_4 & +2\,x_5 & = & -4 \\ 5\,x_1 & +3\,x_2 & -6\,x_3 & +4\,x_4 & -2\,x_5 & = & 12 \\ -2\,x_1 & & +x_3 & -x_4 & & = & 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -4\,x_1 & +x_2 & +x_3 & +11\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & +2\,x_2 & +2\,x_3 & +13\,x_4 & = & 0 \\ 3\,x_1 & & & -9\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -2\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x & +4\,y & -3\,z & = & -2 \\ -3\,x & -5\,y & +5\,z & = & -1 \\ -2\,x & -5\,y & +4\,z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & p \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (27x_1 - 6x_2 - 18x_3, -18x_1 + 3x_2 + 12x_3, +45x_1 - 9x_2 - 30x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 62 & 0 & 48 \\ -20 & 2 & -16 \\ -80 & 0 & -62 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 2, -2)^T, \vec{f_2} = (-1, 3, -2)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, -1)^T$ и $\vec{a} = (-3, 0, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, 1)^T, \vec{f_2} = (5, 1, 2)^T, \vec{f_3} = (-2, 2, 4)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 29 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_4 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ +2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ -5x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 11 \\ -4x_1 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8 \\ -15x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 15 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 14x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 18x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ +y + 2z = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & p \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, 2, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 15 & 16 & -28 \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & 9 & -17 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-4, -2, -3)^T, \vec{f_2} = (-4, -1, -3)^T, \vec{f_3} = (-1, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (18, 48, -12)^T, \vec{f_3} = (-8, 8, 20)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 30 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_2 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -5x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 15 \\ & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -16 \\ x_1 & +5x_2 & & +2x_4 & = & -17 \\ 2x_1 & +6x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & -16 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & -7 \\ & +2x_2 & +4x_3 & -x_4 & -4x_5 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & +6x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & -3 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & & +5x_5 & = & -11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & -10x_4 & = & 0 \\ -5x_1 & -x_2 & -3x_3 & +13x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & & -x_3 & +9x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & -x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & -y & +2z & = & 2 \\ -4x & & -3z & = & 1 \\ 4x & -2y & +3z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & 4 & -3 & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -11 & 6 & 13 \\ -1 & 1 & -7 & p & 8 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, -4, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (6, -7, -7)^T, \vec{f_2} = (-2, 4, 3)^T, \vec{f_3} = (-3, 4, 4)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, -1)^T, \vec{f_2} = (10, -8, 16)^T, \vec{f_3} = (16, 4, -8)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 31 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -14 \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4x + 4y - 3z = -1 \\ -x + y = 1 \\ 3x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & p \\ 1 & -1 & 4 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-3x_1 - 4x_2 - 6x_3, -3x_1 - 2x_2 - 6x_3, +2x_1 + 2x_2 + 4x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 3)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (0, 1, 0)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 32 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 9 \\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & -x_2 & & +2x_4 & = & 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -4x_3 & -4x_4 & = & 16 \\ x_1 & & -2x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & -2x_2 & -6x_3 & -2x_4 & = & 20 \\ 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -6x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & -4x_2 & -6x_3 & -10x_4 & = & 28 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & -3x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 0 \\ -x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x & -2y & +z & = & -1 \\ & +y & +z & = & 2 \\ -x & +y & & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -11 \\ -1 & -2 & p \\ -8 & 3 & 14 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, -2, 5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & -5 \\ -72 & -21 & -55 \\ 36 & 12 & 28 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -5, 8)^T, \vec{f_2} = (1, -2, 6)^T, \vec{f_3} = (2, -4, 7)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (4, 0, -6)^T, \vec{f_3} = (0, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 33 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_2 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 4 \\ -3x_3 - x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 14 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 16x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 20x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + x_4 - 25x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - 4x_5 = 0 \\ -8x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 70x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - 4y - 3z = 1 \\ -x - 2y = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & -1 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & p & 5 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -4, -6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ -6 & -1 & -3 \\ -18 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -6, 3)^T, \vec{f_2} = (5, -10, 4)^T, \vec{f_3} = (-3, 5, -2)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (4, -3, 3)^T, \vec{f_3} = (6, 4, -4)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 34 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 1$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 17 \\ x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ & +2\,x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ -2\,x_1 & & -2\,x_3 & -x_4 & = & -11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & = & 8 \\ 3\,x_1 & -4\,x_2 & -2\,x_3 & -4\,x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -6\,x_2 & +x_3 & -2\,x_4 & = & -8 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 & -5\,x_3 & -6\,x_4 & = & 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & & -x_3 & -2\,x_4 & -11\,x_5 & = & 0 \\ -2\,x_1 & & +4\,x_3 & +x_4 & +10\,x_5 & = & 0 \\ -3\,x_1 & & +3\,x_3 & +2\,x_4 & +13\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & +x_2 & & +3\,x_4 & +13\,x_5 & = & 0 \\ -x_1 & & +5\,x_3 & & +7\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2\,x & -2\,y & & = & 1 \\ & -3\,y & -2\,z & = & 2 \\ -3\,x & -y & +z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 & p \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-8x_1 - 12x_2, 4x_1 + 6x_2, +14x_1 + 19x_2 + x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -14 & -12 & 0 \\ 16 & 14 & 0 \\ -20 & -18 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -3, 2)^T, \vec{f_2} = (2, 3, -1)^T, \vec{f_3} = (1, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, -2)^T, \vec{f_2} = (22, -19, -5)^T, \vec{f_3} = (4, 2, 10)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 35 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 3$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +3\,x_2 & -3\,x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3\,x_2 & -3\,x_3 & & = & 5 \\ -x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & & = & -6 \\ -x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & & = & -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & & -x_3 & +3\,x_4 & +2\,x_5 & = & -4 \\ -3\,x_1 & & +2\,x_3 & -2\,x_4 & +2\,x_5 & = & -5 \\ -3\,x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & +x_4 & +2\,x_5 & = & -15 \\ -5\,x_1 & & +3\,x_3 & -5\,x_4 & & = & -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & -15\,x_4 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & -5\,x_4 & = & 0 \\ 8\,x_1 & -5\,x_2 & +5\,x_3 & -17\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & +x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & & +z & = & -1 \\ 4\,x & -4\,y & +3\,z & = & -2 \\ 3\,x & -y & +2\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & p \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, -2, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 36 & 12 & 28 \\ -28 & -10 & -22 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, 0)^T, \vec{f_2} = (3, -4, 4)^T, \vec{f_3} = (2, -4, 3)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 4, -2)^T, \vec{f_2} = (-22, -17, -23)^T, \vec{f_3} = (12, -2, -10)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 36 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_1 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -2\,x_2 & -2\,x_3 & -\,x_4 & = & -6 \\ 5\,x_1 & +\,x_2 & +2\,x_3 & +\,x_4 & = & -6 \\ -2\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 & +2\,x_4 & = & 8 \\ -2\,x_1 & +3\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & +\,x_5 & = & -13 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & & = & 7 \\ 5\,x_1 & +3\,x_2 & & & +\,x_5 & = & -6 \\ -4\,x_1 & -3\,x_2 & -9\,x_3 & -6\,x_4 & +\,x_5 & = & -27 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2\,x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ & & -\,x_3 & -2\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & -\,x_2 & -4\,x_3 & & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x & -6\,y & -3\,z & = & -3 \\ -\,x & +7\,y & +3\,z & = & 2 \\ & -5\,y & -2\,z & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{1} & -2 & 5 & 3 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & 2 & -4 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & -14 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & p & 2 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (2, -4, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 4, 3)^T, \vec{f_2} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_3} = (-3, 5, 4)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -1, 0)^T, \vec{f_2} = (-8, 16, 10)^T, \vec{f_3} = (4, -8, 16)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 37 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -7 \\ -6x_2 - 5x_3 + x_4 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 7 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 6x_5 = 9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 4x_3 + 8x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & p \\ 3 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (36x_1 + 26x_2 - 70x_3, 15x_1 + 13x_2 - 30x_3, +24x_1 + 18x_2 - 47x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -16 & -14 & 34 \\ -9 & -7 & 18 \\ -12 & -10 & 25 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, -4)^T, \vec{f_2} = (1, 3, -4)^T, \vec{f_3} = (0, -3, 3)^T$ и $\vec{a} = (0, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -1, -3)^T, \vec{f_2} = (-2, -29, 11)^T, \vec{f_3} = (7, -2, -4)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 38 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & -6 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = & -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & +2x_2 & +x_3 & -4x_4 & +3x_5 & = & -1 \\ x_1 & -6x_2 & -2x_3 & -4x_4 & +3x_5 & = & -9 \\ -x_1 & -x_2 & & +2x_4 & & = & -4 \\ x_1 & -4x_2 & -x_3 & -8x_4 & +6x_5 & = & -10 \\ & +7x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -3x_5 & = & 13 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +13x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & & +x_3 & -8x_4 & = & 0 \\ -8x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -34x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & +x_2 & -3x_3 & +29x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +34x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4x & +5y & -3z & = & -3 \\ -3x & -3y & +2z & = & 0 \\ 3x & +4y & -2z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & p \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (4, -5, -2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -3, -3)^T, \vec{f_2} = (-2, 4, 3)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 1, -2)^T, \vec{f_2} = (14, -42, 0)^T, \vec{f_3} = (12, 4, 20)^T$ и $\vec{a} = (3, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 39 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_4 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +3\,x_2 & -\,x_3 & +2\,x_4 & = & -1 \\ 2\,x_1 & -\,x_2 & & +\,x_4 & = & 4 \\ -5\,x_1 & -5\,x_2 & +4\,x_3 & -4\,x_4 & = & -3 \\ 4\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & -3\,x_2 & & -2\,x_4 & +3\,x_5 & = & -19 \\ 3\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & +\,x_4 & & = & 24 \\ x_1 & +\,x_2 & -3\,x_3 & -\,x_4 & +3\,x_5 & = & 5 \\ x_1 & +\,x_2 & -3\,x_3 & -\,x_4 & +3\,x_5 & = & 5 \\ -5\,x_1 & -7\,x_2 & +3\,x_3 & -3\,x_4 & +3\,x_5 & = & -43 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -5\,x_2 & +2\,x_3 & +11\,x_4 & = & 0 \\ & -4\,x_2 & -\,x_3 & +9\,x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -6\,x_2 & +3\,x_3 & +13\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -\,x & -3\,y & -2\,z & = & 2 \\ -\,x & +2\,y & & = & -1 \\ 2\,x & +4\,y & +3\,z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & 3 & -2 & 4 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & -5 & -5 & -4 \\ -5 & -2 & -11 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 7 & p & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 4, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 6, 3)^T, \vec{f_3} = (-1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (3, 10, 1)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 6)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 40 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & 6 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_2 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -8 \\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = & 11 \\ -4x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 7 \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & = & 4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & +4x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & -17 \\ -4x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ -4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +11x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +18x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x & +y & & = & 2 \\ -3x & -y & +2z & = & -1 \\ -2x & -2y & +z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & p \\ 3 & 4 & -4 & 22 \\ -3 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-10x_1 - 4x_2 - 8x_3, -4x_1 - 4x_2 - 4x_3, +12x_1 + 6x_2 + 10x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -4, 3)^T, \vec{f_2} = (-6, -7, 7)^T, \vec{f_3} = (-3, -5, 4)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -2, -2)^T, \vec{f_2} = (-6, 6, -3)^T, \vec{f_3} = (2, 1, -2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 41 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -18 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -13 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = -1 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & p \\ -2 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, 0, -8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -27 & -12 & 12 \\ 8 & 9 & 8 \\ -32 & -12 & 19 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-5, 7, 6)^T, \vec{f_2} = (2, -3, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, 4, 3)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (15, 2, -4)^T, \vec{f_3} = (2, -3, 6)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 42 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 & -2 \\ -6 & 4 & -4 & 1 \\ 8 & -5 & 6 & -3 \\ -8 & 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -3$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -23 \\ -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 23 \\ 8x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 = -23 \\ -8x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 25 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 9 \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_5 = -16 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 2 \\ 11x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 6x_5 = 41 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ +x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -3x + z = -1 \\ -2x + 2y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & 1 & -5 & -4 \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & 3 & 0 & -3 \\ 11 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & p & 7 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (7, 4, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, -2)^T, \vec{f_2} = (3, -1, -2)^T, \vec{f_3} = (2, 3, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -4, 2)^T, \vec{f_2} = (14, 20, 19)^T, \vec{f_3} = (4, 1, -4)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 43 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & 18 \\ -x_1 & & -5x_3 & +2x_4 & = & 24 \\ 3x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & -38 \\ -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = & 26 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & +6x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & -18 \\ -3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = & -23 \\ & +2x_2 & +x_3 & -6x_4 & = & -18 \\ 7x_1 & -9x_2 & -5x_3 & +6x_4 & = & 41 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & -x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & & +2x_3 & -x_4 & -5x_5 & = & 0 \\ -4x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2x & -5y & -3z & = & -1 \\ -5x & -6y & -6z & = & -2 \\ 3x & +6y & +4z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -5 & -10 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & p \\ -1 & -5 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (2x_1, 2x_2, +2x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -26 & -8 & -20 \\ 48 & 14 & 40 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 5, 7)^T, \vec{f_2} = (1, 3, 4)^T, \vec{f_3} = (-3, -4, -6)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -1, 0)^T, \vec{f_2} = (-2, -2, -2)^T, \vec{f_3} = (-2, -2, 4)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 44 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -11 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -21 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -18 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -30 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -12 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_2 - x_3 + x_4 - 8x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 13x_5 = 0 \\ -3x_2 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ -5x - 5y + 4z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & p \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, 4, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 \\ 10 & -2 & 8 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -4, 0)^T, \vec{f_2} = (-1, -8, 0)^T, \vec{f_3} = (-2, -5, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 3, 1)^T, \vec{f_2} = (20, 5, -15)^T, \vec{f_3} = (-10, 4, -12)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 45 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} - x_3 - 4x_4 = -8 \\ -x_1 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_3 + 9x_4 = 17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x - 4y + 3z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & 4 & -3 & 4 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} & 5 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & -7 \\ 7 & -3 & -9 & p & -1 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 5, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -16 & 8 & 4 \\ -24 & 6 & 12 \\ -24 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -1, 3)^T, \vec{f_2} = (-3, -3, 2)^T, \vec{f_3} = (2, 3, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, -1)^T, \vec{f_2} = (2, 4, 0)^T, \vec{f_3} = (8, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 46 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 & -3 \\ -4 & 10 & 6 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & -3\,x_4 & = & -20 \\ -4\,x_1 & +10\,x_2 & +6\,x_3 & -5\,x_4 & = & -31 \\ & -3\,x_2 & -2\,x_3 & +x_4 & = & 9 \\ -x_1 & +4\,x_2 & +4\,x_3 & -2\,x_4 & = & -16 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +2\,x_2 & +x_3 & +3\,x_4 & = & -21 \\ 2\,x_1 & -x_2 & -3\,x_3 & +x_4 & = & 6 \\ & +3\,x_2 & -x_3 & +7\,x_4 & = & -36 \\ x_1 & +x_2 & -2\,x_3 & +4\,x_4 & = & -15 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -3\,x_2 & -x_3 & -2\,x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +6\,x_2 & -2\,x_3 & +4\,x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +5\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & -2\,x_2 & -2\,x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +7\,x_2 & -5\,x_3 & +4\,x_4 & +9\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4\,x & -4\,y & -3\,z & = & -2 \\ 6\,x & -3\,y & -5\,z & = & -2 \\ 3\,x & -3\,y & -2\,z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -8 \\ -4 & -2 & -3 & p \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (33x_1 + 10x_2 + 24x_3, -75x_1 - 22x_2 - 58x_3, -9x_1 - 3x_2 - 5x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (1, 6, 2)^T, \vec{f_3} = (0, 0, 1)^T$ и $\vec{a} = (2, 0, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -4, 1)^T, \vec{f_2} = (0, 1, 4)^T, \vec{f_3} = (-1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 47 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 4 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_4 = 2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & -2x_2 & -6x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & +x_3 & -x_4 & +3x_5 & = & 6 \\ -2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & & = & -2 \\ -2x_1 & -x_2 & +5x_3 & -4x_4 & +8x_5 & = & 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & -2x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -9x_4 & = & 0 \\ & +3x_2 & -x_3 & +7x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & -2y & +z & = & -3 \\ -2x & +2y & +z & = & 2 \\ -x & +3y & & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & p \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 4, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 16 & 12 & 36 \\ -2 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -5, -2)^T, \vec{f_2} = (-4, -1, -5)^T, \vec{f_3} = (1, -1, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -3, -2)^T, \vec{f_2} = (-20, -24, 6)^T, \vec{f_3} = (6, -2, 12)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 48 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 4 & -2 \\ -6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 1$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 & & & -x_4 & = & 9 \\ 7x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = & 9 \\ -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ -6x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -2x_4 & +4x_5 & = & 28 \\ x_1 & & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & -4 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +5x_5 & = & 24 \\ -4x_1 & -3x_2 & -5x_3 & & +2x_5 & = & 36 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4x & -3y & -2z & = & -2 \\ -5x & +5y & +3z & = & 1 \\ -5x & +4y & +3z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{-3} & -5 & 3 & 2 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 12 & -3 & -1 \\ -4 & -1 & 9 & p & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, -7, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 47 & -15 & 38 \\ 102 & -32 & 84 \\ -18 & 6 & -14 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 2, 3)^T, \vec{f_2} = (-4, 1, -3)^T, \vec{f_3} = (-3, -1, -2)^T$ и $\vec{a} = (0, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (10, 3, 6)^T, \vec{f_3} = (3, -2, -4)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 49 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_1 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad +x_2 \quad -x_4 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -5 \\ -x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 24 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ -6x_1 + 11x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 6x_5 = -34 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 6x_5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = -3 \\ -2x - 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & p \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (34x_1 + 16x_2 - 16x_3, -32x_1 - 14x_2 + 16x_3, +40x_1 + 20x_2 - 18x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 2, 3)^T, \vec{f_2} = (3, 2, 2)^T, \vec{f_3} = (-1, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (0, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (6, -26, -9)^T, \vec{f_3} = (4, 3, -6)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 50 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 3$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 6 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = -13 \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 46 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -5 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 = -51 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ -8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 12x_4 = 0 \\ -7x_1 - 6x_2 - 12x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2x - 3y + z = -1 \\ -4x - z = 1 \\ -x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & p \\ 3 & -4 & 11 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, -7, 5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -12 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, 3)^T, \vec{f_2} = (-1, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (1, 1, 2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, -2)^T, \vec{f_2} = (-6, 6, 3)^T, \vec{f_3} = (-2, -1, -2)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 51 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 1$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ \quad\;\; 4x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8 \\ \quad -3x_2 - x_4 = -8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 16 \\ 8x_1 + 6x_2 - x_3 - 6x_4 + x_5 = 21 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = -11 \\ -11x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 - 3x_5 = -26 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -3x + 2y + z = -1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & 4 & -4 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ -8 & -4 & -9 & p & 8 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, -9, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -6 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (-1, -3, 0)^T, \vec{f_3} = (1, -3, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 0, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -2, -2)^T, \vec{f_2} = (-2, 10, -7)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 52 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad +3\,x_2 \qquad -x_4 = -4 \\ \quad -2\,x_2 \qquad +x_4 = 2 \\ 2\,x_1 + x_2 - 7\,x_3 + x_4 = -16 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 = 12 \\ -4\,x_1 - 3\,x_2 + 6\,x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5 = 25 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 - x_4 - 2\,x_5 = -18 \\ -3\,x_1 - 3\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 - x_5 = 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 - x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ -3\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ -5\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 + 5\,x_4 = 0 \\ -8\,x_1 + 2\,x_2 - 5\,x_3 + 8\,x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x + y - z = -2 \\ x + 2\,y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -6 \\ -1 & 6 & 0 & p \\ 2 & -1 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (8x_1 - 14x_2 + 22x_3, -12x_1 + 10x_2 - 24x_3, -9x_1 + 11x_2 - 21x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -26 & 8 & 28 \\ 45 & -15 & -50 \\ -35 & 11 & 38 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 0, -3)^T, \vec{f_2} = (3, 2, -4)^T, \vec{f_3} = (-1, 1, 2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (4, -5, 2)^T, \vec{f_3} = (-4, -4, -2)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 53 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_1 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +3\,x_2 & -x_3 & -2\,x_4 & = & 10 \\ 4\,x_1 & -x_2 & -x_3 & -3\,x_4 & = & -7 \\ -2\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & +x_4 & = & -5 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & -x_4 & = & 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & +x_4 & -2\,x_5 & = & 5 \\ -2\,x_1 & -x_2 & +x_3 & +2\,x_4 & -2\,x_5 & = & -10 \\ -5\,x_1 & -5\,x_2 & +4\,x_3 & +x_4 & -2\,x_5 & = & -18 \\ -6\,x_1 & -5\,x_2 & +4\,x_3 & +x_4 & & = & -15 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & +2\,x_2 & & +6\,x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -2\,x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & +x_2 & -x_3 & +2\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & +5\,x_2 & -2\,x_3 & +13\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4\,x & +y & -3\,z & = & -1 \\ 5\,x & +4\,y & -4\,z & = & -1 \\ -5\,x & -2\,y & +4\,z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -5 & -4 & p \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (2, -7, 4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -2, -2)^T, \vec{f_2} = (2, 1, -3)^T, \vec{f_3} = (0, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (-2, -2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (2, -6, -10)^T, \vec{f_3} = (6, 2, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 54 .

1. Дана матрица
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -5 & -4\end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_3=-2$ и $k_1=1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C)=-det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} -x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & 4\\ & & -4x_3 & -x_4 & = & -1\\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = & -6\\ 3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & -4x_4 & = & -14\end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & & -2x_4 & -4x_5 & = & 8\\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & -10\\ 8x_1 & +5x_2 & -2x_3 & -3x_4 & -6x_5 & = & 6\\ -x_1 & & +4x_3 & -4x_4 & -8x_5 & = & 28\end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:
$$\begin{cases} & -2x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & 0\\ -2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 0\\ -x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -10x_4 & = & 0\\ -2x_1 & & +2x_3 & -8x_4 & = & 0\\ & -8x_2 & +3x_3 & -17x_4 & = & 0\end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система
$$\begin{cases} & -2y & +z & = & 0\\ -2x & +y & +z & = & -1\\ -x & -3y & +2z & = & 1\end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 4 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & p & -3 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, 7, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -14 & -6 & -6 \\ 28 & 12 & 12 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -5, 2)^T, \vec{f_2} = (1, -2, 4)^T, \vec{f_3} = (2, -4, 3)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (16, -28, -18)^T, \vec{f_3} = (10, -2, 12)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 55 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_1 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & -7 \\ 2x_1 & & +3x_3 & +3x_4 & = & 11 \\ & +x_2 & +5x_3 & +x_4 & = & 13 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & & = & -5 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & +5x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & 16 \\ -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 17 \\ & +2x_2 & & +x_4 & = & 7 \\ 7x_1 & -9x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & -50 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & & -x_3 & +2x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & +2x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & & -z & = & -1 \\ x & +2y & & = & -2 \\ & -2y & -z & = & -2 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & p \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (5x_1 - 3x_2 - 4x_3, 6x_1 - 4x_2 - 12x_3, +3x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 30 & 6 & 18 \\ -18 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -2, 2)^T, \vec{f_2} = (-3, -9, -2)^T, \vec{f_3} = (0, -3, 1)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 1, 2)^T, \vec{f_2} = (5, 1, 2)^T, \vec{f_3} = (0, 2, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 56 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 & -2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & & -5x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -4x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & -6x_3 & & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & = & 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & = & -15 \\ 3x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 10 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -5 \\ -4x_1 & +6x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = & -25 \\ -2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 5 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & -4x_2 & +x_3 & -x_4 & +10x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & -4x_4 & +15x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & +x_3 & & -5x_5 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & & & +7x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2x & +2y & -3z & = & -2 \\ -3x & +6y & -4z & = & -1 \\ -x & +y & -2z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & p \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, 0, -2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 16 & -16 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (-4, 7, 3)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -4, -3)^T, \vec{f_2} = (3, 6, -10)^T, \vec{f_3} = (2, -1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 57 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 3$ и $k_4 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -6 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 13 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 11 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 + x_4 + 11x_5 = 0 \\ -x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -5x - 6y - 4z = 2 \\ -x = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & 3 & 3 & -3 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & -5 & p & 7 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, -4, 6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -15 & -4 & -12 \\ 42 & 11 & 36 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, 0)^T, \vec{f_2} = (2, -2, 3)^T, \vec{f_3} = (2, -3, 3)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (-9, 9, 0)^T, \vec{f_3} = (2, 2, 8)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 58 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -1$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -15 \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 33 \\ -2x_2 + x_4 = -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -26 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 15x_5 = 0 \\ +x_2 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 10x_5 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 19x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + 2y = -1 \\ +y + 2z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & p \\ -2 & 3 & -4 & -9 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-8x_1 + 8x_2 - 12x_3, -2x_1 + 2x_2 - 4x_3, +4x_1 - 4x_2 + 6x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -26 & 6 & 18 \\ -96 & 22 & 66 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (2, 6, 1)^T, \vec{f_3} = (-1, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -2, 0)^T, \vec{f_2} = (-10, -5, -10)^T, \vec{f_3} = (4, 2, -5)^T$ и $\vec{a} = (3, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 59 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -4 \\ -4 & -2 & -9 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_1 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 - 9x_3 + 3x_4 = -10 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -1 \\ -x_1 - 4x_4 + 2x_5 = -10 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -14 \\ 3x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 8x_5 = -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 7x_2 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -3y + z = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ -5 & -3 & -3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -2 & p \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 2, 1) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 16 & -16 \\ 0 & -22 & 24 \\ 0 & -20 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-5, 4, -6)^T, \vec{f_2} = (-1, 3, 0)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 2, -3)^T, \vec{f_2} = (6, 3, 10)^T, \vec{f_3} = (1, -2, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 60 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -3 \\ 7 & -1 & 9 & -6 \\ 6 & 3 & 7 & -5 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -2$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & -23 \\ 7x_1 & -x_2 & +9x_3 & -6x_4 & = & -54 \\ 6x_1 & +3x_2 & +7x_3 & -5x_4 & = & -33 \\ 3x_1 & & +3x_3 & -2x_4 & = & -19 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -3x_5 & = & -3 \\ -5x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = & 10 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & & = & 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 14x_1 & +6x_2 & -8x_3 & +8x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & +4y & -2z & = & -1 \\ 5x & +3y & -4z & = & -3 \\ -4x & -5y & +3z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & 2 & -2 & -5 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & -6 & 2 & p & -1 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, 7, -8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (1, 2, 2)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, -2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 61 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = & -12 \\ & +2x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -5x_4 & = & 24 \\ & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & -2x_2 & & +2x_4 & -3x_5 & = & -5 \\ -x_1 & & & +x_4 & +2x_5 & = & 6 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & -4x_5 & = & -11 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 9 \\ -2x_1 & -x_2 & & +2x_4 & +6x_5 & = & 17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & +x_2 & -2x_3 & & +5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & +6x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & +y & -z & = & 2 \\ 2x & & +z & = & 0 \\ x & & +2z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & p \\ 1 & -4 & -3 & 8 \\ -3 & -6 & -4 & 20 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (18x_1 + 6x_2 + 14x_3, -30x_1 - 10x_2 - 24x_3, -9x_1 - 3x_2 - 7x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 16 & -5 & -12 \\ 30 & -9 & -24 \\ 12 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-4, -6, -3)^T, \vec{f_2} = (3, 6, 2)^T, \vec{f_3} = (-1, -3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -2, 0)^T, \vec{f_2} = (-10, -5, -5)^T, \vec{f_3} = (-4, -2, 10)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 62 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \ +2\,x_2 \ -x_3 = 3 \\ -6\,x_2 \ +x_3 \ +x_4 = -4 \\ +3\,x_2 \ -x_3 \ -x_4 = 1 \\ -3\,x_2 \ +2\,x_3 \ +x_4 = 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \ -2\,x_2 \ +2\,x_4 \ +2\,x_5 = -2 \\ -2\,x_2 \ +x_3 \ +2\,x_4 \ +3\,x_5 = -2 \\ +3\,x_2 \ -x_3 \ -x_4 \ +x_5 = -2 \\ -2\,x_1 \ +2\,x_2 \ +x_3 \ -2\,x_4 \ -x_5 = 2 \\ -4\,x_2 \ +x_3 \ -5\,x_5 = 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 \ -2\,x_2 \ -2\,x_3 \ -3\,x_4 = 0 \\ -4\,x_1 \ -5\,x_2 \ -3\,x_3 \ -9\,x_4 = 0 \\ -5\,x_1 \ -7\,x_2 \ -5\,x_3 \ -12\,x_4 = 0 \\ 3\,x_1 \ +3\,x_2 \ +x_3 \ +6\,x_4 = 0 \\ 6\,x_1 \ +9\,x_2 \ +7\,x_3 \ +15\,x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2\,x \ -3\,y \ -3\,z = -2 \\ 3\,x \ +5\,y \ +4\,z = 1 \\ -x \ -2\,y \ -2\,z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & p \\ 4 & -3 & -11 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 5, 4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -1, -8)^T, \vec{f_2} = (3, 1, -7)^T, \vec{f_3} = (-3, 0, 7)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, -2)^T, \vec{f_2} = (-4, -52, -6)^T, \vec{f_3} = (16, -4, 24)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР *   ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА   * ФВС *

Вариант № 63 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & & +3x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ -x_1 & +3x_2 & & & = & -9 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & -x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = & 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & -2 \\ -x_1 & & -2x_3 & -x_4 & & = & -7 \\ -2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -3x_4 & +x_5 & = & -9 \\ -3x_1 & -2x_2 & -5x_3 & -4x_4 & +x_5 & = & -16 \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & = & 9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & +4y & -2z & = & 0 \\ -2x & -2y & +z & = & 1 \\ -x & -2y & & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & -1 & -5 & -3 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} & -5 & -5 & -3 \\ 6 & 3 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & p & 0 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -7, -6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 16 & -5 & -7 \\ 24 & -9 & -9 \\ 24 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, 1)^T, \vec{f_2} = (-1, -1, 1)^T, \vec{f_3} = (2, 3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (2, 3, 3)^T, \vec{f_3} = (3, -1, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 64 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -3$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -21 \\ +3x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = -5 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -9 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 10 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ -7x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} +3y - z = -1 \\ -3x + 7y - 4z = -1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & -4 & p \\ -4 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (7x_1 + 9x_2 + 6x_3, -14x_1 - 18x_2 - 12x_3, +10x_1 + 14x_2 + 10x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, 0)^T$, $\vec{f_2} = (-1, -3, -2)^T$, $\vec{f_3} = (0, -1, 1)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 3, 2)^T$, $\vec{f_2} = (-12, 20, -6)^T$, $\vec{f_3} = (-4, 0, 8)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 65 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_4 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +3\,x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & & & +x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 6 \\ -x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & & = & -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & -2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 9 \\ x_1 & +4\,x_2 & & +2\,x_4 & +3\,x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2\,x_2 & & -2\,x_4 & +2\,x_5 & = & 10 \\ -3\,x_1 & +2\,x_2 & +2\,x_3 & +6\,x_4 & +7\,x_5 & = & -18 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & -3\,x_4 & = & 0 \\ & +x_2 & +x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \\ & & +x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +2\,x_2 & +x_3 & +8\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4\,x & -2\,y & -3\,z & = & -1 \\ -6\,x & +2\,y & +5\,z & = & 2 \\ -5\,x & +3\,y & +4\,z & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -6 & 7 & 5 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & p \\ 5 & 3 & 16 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 7, -8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (-2, -1, 1)^T, \vec{f_3} = (1, -2, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (5, 4, -3)^T, \vec{f_2} = (-40, 38, -16)^T, \vec{f_3} = (2, 8, 14)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 66 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & -2 \\ 6 & -6 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -1$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -4\,x_2 & & -2\,x_4 & = & 15 \\ 6\,x_1 & -6\,x_2 & +x_3 & -5\,x_4 & = & 25 \\ 4\,x_1 & -5\,x_2 & -4\,x_3 & -3\,x_4 & = & 36 \\ 2\,x_1 & -3\,x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & -x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & +3\,x_5 & = & -7 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & & +x_5 & = & 11 \\ 5\,x_1 & +3\,x_2 & +x_3 & +2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 18 \\ -8\,x_1 & -5\,x_2 & +x_3 & -2\,x_4 & +x_5 & = & -29 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ & +2\,x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & -3\,x_4 & = & 0 \\ -2\,x_1 & & -3\,x_3 & +7\,x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & +2\,x_2 & +5\,x_3 & -7\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & -y & -2\,z & = & -2 \\ & -3\,y & +z & = & -1 \\ 2\,x & +2\,y & +3\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 2 & -4 & -4 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & -5 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & -9 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & p & 8 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c},\vec{x}], \forall\vec{x}\in\mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5,7,-7)\in\mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-7,-6,-6)^T, \vec{f_2} = (3,3,2)^T, \vec{f_3} = (-2,-1,-1)^T$ и $\vec{a} = (0,-1,-3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0,-3,-1)^T, \vec{f_2} = (20,-3,9)^T, \vec{f_3} = (-3,-2,6)^T$ и $\vec{a} = (-1,-1,2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3})$.

Вариант № 67 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 0 & -4 \\ 10 & -4 & 5 & -5 \\ -8 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -7\,x_1 & +x_2 & -x_3 & +2\,x_4 & = & 13 \\ 9\,x_1 & -2\,x_2 & & -4\,x_4 & = & -20 \\ 10\,x_1 & -4\,x_2 & +5\,x_3 & -5\,x_4 & = & -17 \\ -8\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 15 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +4\,x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 18 \\ -3\,x_1 & +5\,x_2 & +4\,x_3 & -2\,x_4 & = & 21 \\ -2\,x_1 & +5\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 23 \\ -5\,x_1 & +13\,x_2 & +8\,x_3 & +4\,x_4 & = & 57 \\ 5\,x_1 & -10\,x_2 & -7\,x_3 & & = & -44 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +4\,x_2 & +2\,x_3 & -2\,x_4 & +6\,x_5 & = & 0 \\ -3\,x_1 & +7\,x_2 & +4\,x_3 & -2\,x_4 & +9\,x_5 & = & 0 \\ -2\,x_1 & +5\,x_2 & +3\,x_3 & -2\,x_4 & +7\,x_5 & = & 0 \\ -5\,x_1 & +15\,x_2 & +8\,x_3 & -6\,x_4 & +21\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3\,x & -y & -z & = & 2 \\ 5\,x & +2\,y & -3\,z & = & -2 \\ -4\,x & & +2\,z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -10 \\ -7 & 2 & -3 & p \\ -5 & 1 & -3 & 10 \\ -5 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (7x_1 + 4x_2 + 8x_3, -x_2 - 6x_3, -10x_1 - 5x_2 - 8x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -10 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (-3, 4, 2)^T, \vec{f_3} = (2, -2, -1)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, -1, -3)^T, \vec{f_2} = (0, 21, -7)^T, \vec{f_3} = (5, -1, -3)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 68 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5\,x_1 & -4\,x_2 & -2\,x_3 & +x_4 & = & 24 \\ 3\,x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & -x_4 & = & -1 \\ 4\,x_1 & -3\,x_2 & & & = & 13 \\ 6\,x_1 & -5\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & = & 32 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & -3\,x_2 & -2\,x_3 & -4\,x_4 & = & -25 \\ -x_1 & -2\,x_2 & -3\,x_3 & & = & -11 \\ -x_1 & -5\,x_2 & -5\,x_3 & -4\,x_4 & = & -36 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -4\,x_4 & = & -14 \\ x_1 & -4\,x_2 & -x_3 & -8\,x_4 & = & -39 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & -x_2 & & +x_4 & -3\,x_5 & = & 0 \\ & & & +x_4 & +2\,x_5 & = & 0 \\ & +x_2 & +4\,x_3 & -x_4 & +9\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & +2\,x_4 & -7\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4\,x & +5\,y & -3\,z & = & 1 \\ -6\,x & -6\,y & +5\,z & = & -1 \\ 3\,x & +4\,y & -2\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -6 & -6 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & p \\ 3 & 4 & 14 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (7, 7, -8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 18 & -5 & -15 \\ -42 & 13 & 36 \\ 34 & -10 & -29 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -1, -4)^T, \vec{f_2} = (0, -5, 1)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 3)^T$ и $\vec{a} = (0, -2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, -2)^T, \vec{f_2} = (-4, -13, -6)^T, \vec{f_3} = (-2, 2, -3)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 69 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 3$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\; + x_2 \qquad\quad - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 = -6 \\ -x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 - 12x_5 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 17x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = -2 \\ -3x + 5y - 4z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 5 & 3 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & -4 & -3 & -5 \\ -3 & -3 & -2 & -8 & -8 \\ -5 & -6 & -6 & p & -13 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, -2, 2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -4, -3)^T, \vec{f_2} = (-1, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -2, 2)^T, \vec{f_2} = (18, 22, -5)^T, \vec{f_3} = (-2, 3, 6)^T$ и $\vec{a} = (3, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 70 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_1 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +3x_2 & -4x_3 & -2x_4 & = & 15 \\ 3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +4x_4 & = & -18 \\ -x_1 & -x_2 & +3x_3 & & = & -9 \\ -2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & -3 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & -4x_3 & -2x_4 & = & -9 \\ -2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ -4x_1 & +7x_2 & +9x_3 & +6x_4 & = & 24 \\ 5x_1 & -8x_2 & -6x_3 & -6x_4 & = & -21 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & -4x_2 & -3x_3 & -2x_4 & -10x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -6x_2 & -5x_3 & -2x_4 & -16x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +16x_5 & = & 0 \\ & -3x_2 & -2x_3 & -x_4 & -6x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & -11x_2 & -10x_3 & -5x_4 & -32x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & +2z & = & -2 \\ -4x & -2y & -3z & = & -2 \\ -5x & -4y & -4z & = & 0 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & p \\ 0 & 4 & -2 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (x_1 - 3x_2, 2x_1 - 4x_2, +2x_1 - 2x_2),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, -2)^T$, $\vec{f_2} = (-2, 2, -3)^T$, $\vec{f_3} = (2, -1, 3)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 5, -3)^T$, $\vec{f_2} = (-22, 35, 29)^T$, $\vec{f_3} = (10, -2, 10)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 71 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -4 & -6 & -2 & -3 \\ -6 & -3 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 4 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -1$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 3\,x_1 & & +2\,x_3 & +2\,x_4 & = & 4 \\ -4\,x_1 & -6\,x_2 & -2\,x_3 & -3\,x_4 & = & -17 \\ -6\,x_1 & -3\,x_2 & -4\,x_3 & -5\,x_4 & = & -13 \\ 4\,x_1 & +\,x_2 & +3\,x_3 & +3\,x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} -\,x_1 & +\,x_2 & +2\,x_3 & -\,x_4 & +4\,x_5 & = & -9 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & & -\,x_4 & +2\,x_5 & = & -5 \\ -3\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 & & +\,x_5 & = & -6 \\ & +\,x_2 & -2\,x_3 & & -2\,x_5 & = & 4 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 4\,x_1 & +5\,x_2 & -3\,x_3 & +\,x_4 & = & 0 \\ -6\,x_1 & -5\,x_2 & +5\,x_3 & +7\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & -6\,x_2 & +4\,x_3 & & = & 0 \\ 2\,x_1 & +5\,x_2 & -\,x_3 & +9\,x_4 & = & 0 \\ -4\,x_1 & -7\,x_2 & +3\,x_3 & -7\,x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 4\,x & +5\,y & -3\,z & = & -1 \\ -6\,x & -9\,y & +5\,z & = & 1 \\ -5\,x & -6\,y & +4\,z & = & -1 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & p \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, -4, -6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, -4)^T, \vec{f_2} = (0, -1, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, -5)^T$ и $\vec{a} = (-3, 0, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (10, -4, -12)^T, \vec{f_3} = (-8, -2, -6)^T$ и $\vec{a} = (-3, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 72 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_3 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & +2\,x_3 & -\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & -6\,x_3 & +3\,x_4 & = & 6 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -7\,x_3 & +3\,x_4 & = & 4 \\ x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & & = & -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & +2\,x_2 & -4\,x_3 & +\,x_4 & -3\,x_5 & = & -5 \\ -\,x_1 & +3\,x_2 & +3\,x_3 & +3\,x_4 & +3\,x_5 & = & -15 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & +7\,x_3 & +2\,x_4 & +6\,x_5 & = & -10 \\ x_1 & -\,x_2 & -7\,x_3 & -2\,x_4 & -6\,x_5 & = & 10 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -4\,x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & -20\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -4\,x_2 & +3\,x_3 & +24\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & +26\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & & +\,x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & -\,y & +\,z & = & -1 \\ -\,x & +4\,y & & = & -1 \\ 3\,x & & +2\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & -5 & -1 & 4 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 7 & 4 & -7 \\ 4 & -6 & 3 & p & -1 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (7, -9, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -29 & 18 & -18 \\ -6 & 3 & -4 \\ 39 & -25 & 24 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (5, -7, 4)^T, \vec{f_2} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 3, 2)^T, \vec{f_2} = (24, -20, -6)^T, \vec{f_3} = (-2, -6, 12)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 73 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 3$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 +2x_3 -x_4 = 4 \\ +3x_2 -x_4 = 12 \\ 2x_1 -3x_2 +x_3 +x_4 = -10 \\ x_1 -3x_3 +2x_4 = -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 +2x_2 +3x_3 -x_4 +x_5 = 1 \\ 4x_1 +5x_2 +3x_3 -3x_4 +3x_5 = -10 \\ 3x_1 +3x_2 +x_3 -2x_4 +2x_5 = -8 \\ -3x_1 -3x_2 -4x_3 +2x_4 -x_5 = -1 \\ -11x_1 -13x_2 -7x_3 +8x_4 -8x_5 = 28 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 +2x_2 +2x_3 -2x_4 = 0 \\ -5x_1 +3x_2 +2x_3 -2x_4 +x_5 = 0 \\ -x_1 +x_2 +x_5 = 0 \\ 6x_1 -4x_2 -2x_3 +2x_4 -2x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -4x -2z = 2 \\ 5x +2y +3z = -3 \\ -3x +y -z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 & p \\ 4 & 4 & -1 & -13 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 9x_3, 2x_1 + 5x_2 + 13x_3, -2x_2 - 4x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 38 & 12 & -32 \\ -120 & -38 & 96 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, 1, 2)^T, \vec{f_2} = (-2, 5, 3)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (6, -2, -10)^T, \vec{f_3} = (-2, -6, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 74 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad +4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -5 \\ -x_1 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 7 \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_5 = 2 \\ 9x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -39 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -5x - y + 2z = -2 \\ -4x + y + z = 1 \\ 4x - z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -13 \\ 3 & -3 & p \\ -8 & 4 & 16 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, 2, -6) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, 3, 3)^T, \vec{f_2} = (-2, 2, -1)^T, \vec{f_3} = (-3, -2, -2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -5, -2)^T, \vec{f_2} = (-17, -5, 4)^T, \vec{f_3} = (1, -1, 3)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 75 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -23 \\ -x_4 = -2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 13 \\ -2x_1 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -5 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 5 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 8x_5 = 18 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + 4y - 3z = 2 \\ -2x = 1 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -4 & -10 & -5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & 2 & -4 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ -7 & 5 & 4 & p & 6 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 0, -4) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 & 16 \\ 22 & -17 & -38 \\ -13 & 11 & 24 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (0, 6, -1)^T, \vec{f_3} = (1, -3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, -2)^T, \vec{f_2} = (-5, 10, -5)^T, \vec{f_3} = (10, 4, -2)^T$ и $\vec{a} = (3, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 76 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_4 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_2 - x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 = -8 \\ -x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -4 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x - 5y - 2z = 2 \\ -4x + 4y + 3z = -1 \\ -4x + 6y + 3z = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 & p \\ -5 & 1 & -3 & -6 \\ 4 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (24x_1 - 9x_2 - 6x_3, 46x_1 - 17x_2 - 12x_3, +36x_1 - 12x_2 - 11x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & -10 & 12 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, -6, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, -2, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (3, 9, 6)^T, \vec{f_3} = (-8, 4, -2)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 77 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 4 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 1$ и $k_4 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -17 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_4 = -14 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = -12 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 22 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -16 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 - 3x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 - 2x_5 = 17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -3 \\ +3y + z = 1 \\ -2x + 4y + 3z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & p \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, -2, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 0, 0)^T, \vec{f_2} = (-1, 7, 2)^T, \vec{f_3} = (0, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (0, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 4, -3)^T, \vec{f_2} = (19, 20, 14)^T, \vec{f_3} = (-8, 2, 8)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 78 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ -5 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & & & +2x_4 & = & -2 \\ 5x_1 & -x_2 & +4x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ -5x_1 & -2x_2 & -x_3 & -4x_4 & = & 8 \\ 4x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & -16 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -11 \\ -6x_1 & -5x_2 & +10x_3 & -8x_4 & -7x_5 & = & 37 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ -5x_1 & -4x_2 & -6x_3 & +11x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -8x_4 & = & 0 \\ -9x_1 & -8x_2 & -12x_3 & +23x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & +7x_2 & +10x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -2x & -2y & -3z & = & -2 \\ -5x & -4y & -6z & = & 2 \\ 3x & +3y & +4z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{-1} & -4 & -4 & 3 \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & -2 & -5 & 2 \\ -5 & 0 & -10 & -13 & 8 \\ -8 & -3 & 8 & p & -7 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, 5, -5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -2, 0)^T, \vec{f_2} = (-1, 1, 2)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -4, -2)^T, \vec{f_2} = (18, 12, -15)^T, \vec{f_3} = (-4, 1, -4)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР *   ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА   * ФВС *

Вариант № 79 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 4 матрицы A линейной комбинацией строк номер 4 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -1$ и $k_4 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2\,x_3 + 2\,x_4 = 5 \\ 3\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_4 = 9 \\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 = -8 \\ -3\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 - 3\,x_4 = 2 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 = -12 \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4 = -14 \\ -7\,x_1 - 8\,x_2 - 5\,x_3 + 3\,x_4 = 22 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 - 2\,x_4 - 6\,x_5 = 0 \\ 2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 - 6\,x_5 = 0 \\ 5\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 - 2\,x_5 = 0 \\ 4\,x_1 - 10\,x_2 - 5\,x_3 + 2\,x_4 + 6\,x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x - y - z = -2 \\ -3\,x - 3\,y + 2\,z = -3 \\ -3\,x + 2\,z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 4 & p \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (5x_1 - 2x_2 + 6x_3, 21x_1 - 8x_2 + 18x_3, -2x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -25 & 11 & 41 \\ -66 & 30 & 103 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (1, -4, 0)^T, \vec{f_3} = (2, 0, -1)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 4, 2)^T, \vec{f_2} = (40, 12, -24)^T, \vec{f_3} = (-12, 8, -16)^T$ и $\vec{a} = (-2, 0, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 80 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -1$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = -2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ +3x_2 + 6x_3 - x_4 = 18 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 10x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 18 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y - z = 0 \\ +2y + z = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & p \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, -4, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -2, 0)^T, \vec{f_2} = (1, 1, 2)^T, \vec{f_3} = (0, 1, 1)^T$ и $\vec{a} = (1, -3, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 5, -3)^T, \vec{f_2} = (46, 37, 31)^T, \vec{f_3} = (7, -2, -8)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 81 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & -2 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 8 \\ -2x_1 & -4x_2 & & +3x_4 & = & 21 \\ x_1 & +4x_2 & -5x_3 & -2x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & 11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 & & +x_3 & +3x_4 & = & -6 \\ 6x_1 & +4x_2 & -4x_3 & -4x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & -x_2 & & -2x_4 & = & 8 \\ & +4x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -20 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & & -2x_3 & -x_4 & -6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -4x_3 & -2x_4 & -13x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = & 0 \\ 8x_1 & -x_2 & -6x_3 & -3x_4 & -19x_5 & = & 0 \\ -9x_1 & -x_2 & +6x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & & -2z & = & -1 \\ 5x & -3y & -4z & = & -1 \\ 2x & +y & -z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -3 & -3 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & -2 & 0 & p & -5 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (4, -2, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -6 & 8 & 12 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (4, -2, -5)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 3)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -3, -2)^T, \vec{f_2} = (18, 26, -12)^T, \vec{f_3} = (8, 0, 12)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 82 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -3$ и $k_4 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\quad +3\,x_2 \; - x_3 \; + x_4 = -7 \\ \quad\quad -2\,x_2 \; +3\,x_3 \; - x_4 = -1 \\ -2\,x_1 \; +5\,x_2 \; -2\,x_3 \; +3\,x_4 = -20 \\ -x_1 \; -2\,x_2 \; +2\,x_3 = -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 - x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ -3\,x_1 + 2\,x_3 + x_4 = 7 \\ -5\,x_1 - x_2 - 2\,x_3 - x_4 = 7 \\ -5\,x_1 - x_2 - 2\,x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5 = 0 \\ 2\,x_1 + x_3 - 5\,x_5 = 0 \\ -x_2 - 2\,x_4 + 2\,x_5 = 0 \\ -x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 - 2\,x_5 = 0 \\ 4\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 - 12\,x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x + 2\,y + 2\,z = -1 \\ -3\,x + 2\,y + 4\,z = -2 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 2 & -13 \\ -7 & -6 & 4 & p \\ -5 & 3 & -2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 & -15 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-13x_1 - 4x_2 - 8x_3, -4x_1 - x_2 - 2x_3, +23x_1 + 7x_2 + 14x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 4 \\ -14 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, 0)^T, \vec{f_2} = (-1, 1, 2)^T, \vec{f_3} = (2, 1, -1)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 0, -1)^T, \vec{f_2} = (2, 4, -2)^T, \vec{f_3} = (-4, 4, 4)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 83 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_3 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & & +2\,x_3 & & = & 3 \\ & +2\,x_2 & +2\,x_3 & -x_4 & = & 10 \\ -x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & = & 3 \\ & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & & -3\,x_3 & -2\,x_4 & +x_5 & = & 2 \\ -x_1 & & -2\,x_3 & -4\,x_4 & +3\,x_5 & = & 3 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & -5\,x_3 & -2\,x_4 & -3\,x_5 & = & -4 \\ 3\,x_1 & & +4\,x_3 & & +x_5 & = & -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & -x_2 & -x_3 & -4\,x_4 & = & 0 \\ -3\,x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & +14\,x_4 & = & 0 \\ -3\,x_1 & & +2\,x_3 & +10\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & -x_2 & +3\,x_3 & +18\,x_4 & = & 0 \\ & +2\,x_2 & & -4\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & -y & -z & = & -2 \\ -3\,x & +3\,y & +2\,z & = & -2 \\ -3\,x & & +2\,z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & p \\ 3 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 7, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 15 & -12 & -12 \\ 6 & -3 & -6 \\ 11 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -4, -3)^T, \vec{f_2} = (-2, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, -3, -2)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (11, -7, -8)^T, \vec{f_3} = (2, -6, 8)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 84 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -x_2 & & -2x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & & -4x_3 & +4x_4 & = & -12 \\ -3x_1 & +x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & & -x_3 & +3x_4 & = & -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = & -12 \\ 5x_1 & +3x_2 & -3x_3 & & -2x_5 & = & 25 \\ x_1 & +x_2 & -5x_3 & -4x_4 & & = & 13 \\ 6x_1 & +4x_2 & -8x_3 & -4x_4 & -2x_5 & = & 38 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +3x_4 & = & 0 \\ & -4x_2 & -x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x & & +z & = & 2 \\ -3x & +2y & -2z & = & -3 \\ & -2y & +z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -4 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -6 & p & -7 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, -5, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (0, 4, -1)^T, \vec{f_3} = (1, 2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -5, -2)^T, \vec{f_2} = (39, -15, 18)^T, \vec{f_3} = (-4, -2, 7)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 85 .

1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & -2\,x_3 & +x_4 & = & 7 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & +4\,x_3 & & = & -13 \\ x_1 & -\,x_2 & +5\,x_3 & -2\,x_4 & = & -17 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & +3\,x_3 & & = & -9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & -2\,x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & +4\,x_3 & & -\,x_5 & = & -3 \\ x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & -2\,x_4 & +2\,x_5 & = & 4 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & +3\,x_3 & & -2\,x_5 & = & -5 \\ & -\,x_2 & -6\,x_3 & +2\,x_4 & -\,x_5 & = & -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & +2\,x_4 & -\,x_5 & = & 0 \\ & -\,x_2 & +3\,x_3 & +2\,x_4 & +5\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +\,x_2 & & +4\,x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +\,x_2 & & +4\,x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3\,x & & +2\,z & = & -1 \\ 5\,x & -\,y & +4\,z & = & 1 \\ -2\,x & -\,y & -\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & -2 & p \\ -3 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3, -12x_1 + 4x_2 + 12x_3, +8x_1 - 4x_2 - 10x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 5, 2)^T, \vec{f_2} = (-3, -1, -2)^T, \vec{f_3} = (-2, -4, -1)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 8, -10)^T, \vec{f_3} = (-4, 4, 4)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 86 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -3$ и $k_2 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & -2\,x_2 & & -x_4 & = & -5 \\ x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & & = & -8 \\ 2\,x_1 & -4\,x_2 & +7\,x_3 & +x_4 & = & -17 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2\,x_4 & = & -1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & -3\,x_2 & -2\,x_3 & -2\,x_4 & +x_5 & = & 9 \\ & -2\,x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & +3\,x_5 & = & 6 \\ x_1 & +4\,x_2 & +3\,x_3 & -4\,x_4 & -4\,x_5 & = & -9 \\ & -8\,x_2 & -6\,x_3 & -2\,x_4 & +5\,x_5 & = & 24 \\ 2\,x_1 & +10\,x_2 & +8\,x_3 & -10\,x_4 & -11\,x_5 & = & -24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -x_2 & -2\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & +2\,x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -x_2 & & +3\,x_4 & = & 0 \\ 7\,x_1 & -x_2 & +2\,x_3 & +7\,x_4 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -2\,x_2 & -6\,x_3 & -6\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & & +z & = & -2 \\ -x & +y & & = & 1 \\ -x & -y & +2\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -14 \\ 4 & -1 & p \\ -7 & -2 & -11 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, 2, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -18 \\ -10 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (2, 1, 1)^T, \vec{f_3} = (-1, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -5, 2)^T, \vec{f_2} = (71, -35, -52)^T, \vec{f_3} = (-11, -3, -13)^T$ и $\vec{a} = (-3, -3, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 87 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} -x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -12 \\ & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 7 \\ -3x_1 & -3x_2 & & -4x_4 & = & -26 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 22 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & -3x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & -7 \\ 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 11 \\ & -2x_2 & & -4x_4 & +5x_5 & = & -3 \\ -3x_1 & -7x_2 & -3x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & -18 \\ & +2x_2 & & +4x_4 & -5x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & -13x_4 & = & 0 \\ -5x_1 & +x_2 & -3x_3 & +16x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & & +3x_3 & -13x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & & -z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 0 \\ -3x & -y & +2z & = & 0 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & 1 & 5 & -4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -1 & -11 & 6 \\ -9 & -3 & -2 & p & 6 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, 5, 5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (-4, 6, -3)^T, \vec{f_3} = (-3, 4, -2)^T$ и $\vec{a} = (0, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (2, -2, 4)^T, \vec{f_3} = (4, -4, -4)^T$ и $\vec{a} = (3, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 88 .

1. Дана матрица
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} \quad -x_2 -5x_3 +2x_4 = 18 \\ x_1 + x_2 -7x_3 +3x_4 = 19 \\ 2x_1 + x_2 -6x_3 +4x_4 = 18 \\ x_1 \quad -6x_3 +3x_4 = 19 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} \quad -x_2 -5x_3 +2x_4 -2x_5 = -6 \\ x_1 + x_2 -7x_3 +3x_4 +3x_5 = -17 \\ 2x_1 + x_2 -6x_3 +4x_4 - x_5 = -14 \\ x_1 \quad -6x_3 +3x_4 -2x_5 = -9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 +2x_3 +11x_4 = 0 \\ -4x_1 +2x_2 +3x_3 -11x_4 = 0 \\ -10x_1 +4x_2 - x_3 -33x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 +5x_3 \quad = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система
$$\begin{cases} 3x + y -2z = 2 \\ \quad -y - z = 1 \\ 2x \quad - z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 11 \\ 5 & 0 & -4 & p \\ 4 & -5 & -4 & 17 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}: \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (65x_1 - 24x_2 - 48x_3, 76x_1 - 27x_2 - 58x_3, +50x_1 - 19x_2 - 36x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 \\ -2 & -9 & 6 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (0, -2, -1)^T, \vec{f_3} = (1, -2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, 1)^T, \vec{f_2} = (0, 1, 1)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 89 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & & & +x_4 & = & 0 \\ & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -x_4 & -4x_5 & = & -4 \\ -x_1 & & & -x_4 & +2x_5 & = & 8 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & & +2x_5 & = & 17 \\ -2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -2x_4 & -2x_5 & = & 4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & & +5x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -15x_4 & = & 0 \\ x_1 & +11x_2 & -4x_3 & +27x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & -3y & -2z & = & 2 \\ x & & & = & 2 \\ 3x & +5y & +4z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -5 & -8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & p \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 4, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 28 & 12 & -12 \\ -62 & -26 & 28 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 4, -3)^T, \vec{f_2} = (0, -2, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, -3, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (0, -3, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, 2, -2)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 90 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = -25 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = -6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -14 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -9 \\ 13x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 19 \\ 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -32 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -z = 1 \\ y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & -3 & -2 & -1 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-5} & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 9 & 7 & 6 \\ -7 & -8 & 9 & p & 9 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, -9, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -8 & -6 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 5, 3)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, 0)^T, \vec{f_2} = (0, 0, 10)^T, \vec{f_3} = (8, -4, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 91 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 4 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_3 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -12 \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -13 \\ -x_1 - x_3 - 2x_4 = -8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -6 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -12 \\ -3x_1 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 12x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & p \\ 3 & -5 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-x_1 - 3x_2 + 3x_3, 2x_2, +2x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-7, -6, -6)^T, \vec{f_2} = (-4, -2, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, -1, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (11, 9, 8)^T, \vec{f_3} = (3, -1, -3)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 92 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_4 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 20 \\ -2x_1 & +9x_2 & +6x_3 & +3x_4 & = & 38 \\ -x_1 & -2x_2 & & & = & -1 \\ -2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 28 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & = & -10 \\ 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 9 \\ -3x_1 & -x_2 & +7x_3 & +6x_4 & = & 29 \\ 14x_1 & +8x_2 & +4x_3 & -8x_4 & = & 8 \\ -9x_1 & -5x_2 & -x_3 & +6x_4 & = & 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & & +2x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -3x_4 & -5x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & -4x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & -3y & +2z & = & 0 \\ -x & -2y & & = & -2 \\ 4x & -4y & +3z & = & 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & p \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-5, -7, -5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, 1)^T, \vec{f_2} = (1, -2, 0)^T, \vec{f_3} = (2, -4, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (3, -6, -6)^T, \vec{f_3} = (2, -1, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 93 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ -2x_1 - 4x_3 + x_4 = -6 \\ -3x_2 - x_4 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 13 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ +2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 17x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -4x - y - z = -1 \\ -3x + y = 0 \\ 5x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & 3 & 1 & -1 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -8 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & p & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, -5, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -13 & -30 & 30 \\ 25 & 52 & -50 \\ 20 & 40 & -38 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, 1)^T, \vec{f_2} = (1, -7, 0)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -3, 0)^T, \vec{f_2} = (21, 7, -30)^T, \vec{f_3} = (9, 3, 7)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 94 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -3$ и $k_4 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -3\,x_2 & -5\,x_3 & -2\,x_4 & = & -31 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & +5\,x_3 & & = & 20 \\ & & +6\,x_3 & -\,x_4 & = & 16 \\ -4\,x_1 & +4\,x_2 & +6\,x_3 & +3\,x_4 & = & 40 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & & -3\,x_3 & -4\,x_4 & = & 14 \\ -\,x_1 & +\,x_2 & -2\,x_3 & +2\,x_4 & = & 2 \\ -5\,x_1 & +\,x_2 & +4\,x_3 & +10\,x_4 & = & -26 \\ x_1 & +\,x_2 & -5\,x_3 & -2\,x_4 & = & 16 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 5\,x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & -2\,x_4 & -3\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & +\,x_4 & & = & 0 \\ 5\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & -2\,x_4 & -\,x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & -3\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & & +\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & -4\,y & +\,z & = & -2 \\ x & -6\,y & & = & -2 \\ -\,x & +3\,y & & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -5 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -9 \\ 1 & -6 & 2 & p \\ -4 & 1 & -3 & -15 \\ 2 & -4 & 3 & 14 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-7x_1 + 3x_2 - 6x_3, 6x_1 - 4x_2 + 6x_3, +12x_1 - 6x_2 + 11x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -3, 5)^T, \vec{f_2} = (-2, 4, -1)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -4, -2)^T, \vec{f_2} = (-26, -33, 27)^T, \vec{f_3} = (12, 2, 14)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 95 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 4 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 2$ и $k_4 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +3\,x_2 & -4\,x_3 & +2\,x_4 & = & 11 \\ -2\,x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & -\,x_4 & = & -8 \\ -\,x_1 & -\,x_2 & +3\,x_3 & & = & -4 \\ -2\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & = & -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & -4\,x_2 & +\,x_3 & +\,x_4 & +3\,x_5 & = & 11 \\ & -\,x_2 & +\,x_3 & -4\,x_4 & -2\,x_5 & = & 2 \\ -\,x_1 & +3\,x_2 & & -2\,x_4 & -2\,x_5 & = & -7 \\ 2\,x_1 & -5\,x_2 & +2\,x_3 & -3\,x_4 & +\,x_5 & = & 13 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & & -2\,x_3 & -4\,x_4 & = & 0 \\ 6\,x_1 & +4\,x_2 & -5\,x_3 & +\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & -\,x_2 & -\,x_3 & -5\,x_4 & = & 0 \\ & +4\,x_2 & -\,x_3 & +9\,x_4 & = & 0 \\ -4\,x_1 & -5\,x_2 & +4\,x_3 & -6\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 4\,x & & -2\,z & = & 2 \\ 7\,x & +4\,y & -5\,z & = & -1 \\ 3\,x & -\,y & -\,z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ -5 & 1 & p \\ 5 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 7, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 22 & -34 & 62 \\ -40 & 64 & -116 \\ -30 & 48 & -87 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 3, -2)^T, \vec{f_2} = (-3, 2, -4)^T, \vec{f_3} = (2, -4, 3)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (-5, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 1, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 96 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 2$ и $k_1 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -11 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 - 3x_5 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -9 \\ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -z = -3 \\ x + 3y = -2 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & -4 & 3 & -4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & -3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 10 & p & 0 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, 5, 1) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 43 & 18 & -18 \\ -75 & -32 & 30 \\ 30 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 5, 0)^T, \vec{f_2} = (2, 6, 0)^T, \vec{f_3} = (-1, -4, -1)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (30, -5, -15)^T, \vec{f_3} = (5, 3, 9)^T$ и $\vec{a} = (-1, 0, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 97 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -11 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 = 11 \\ 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} +4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -8 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_5 = -6 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_5 = 12 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -11x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 22x_5 = 0 \\ -7x_1 + 6x_2 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} +3y - 2z = -1 \\ -x - y + z = -3 \\ x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & p \\ -5 & -1 & -5 & -6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-9x_1 + 12x_2, -8x_1 + 11x_2, -16x_1 + 20x_2 + x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (0, -4, 1)^T, \vec{f_3} = (-1, 2, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 0, 2)^T, \vec{f_2} = (4, -5, -2)^T, \vec{f_3} = (-2, -2, 1)^T$ и $\vec{a} = (-3, -3, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 98 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -2$ и $k_2 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & & & = & 4 \\ & & & -x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 10 \\ 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 7 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & -8 \\ & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -4x_5 & = & -16 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & +x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & & +3x_3 & +10x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +10x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +20x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & -10x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & +4y & +2z & = & 1 \\ x & +3y & & = & 2 \\ -2x & -3y & -z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -5 & -1 & p \\ -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (7, 7, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 27 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 0 \\ -50 & -10 & -28 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 3, -3)^T, \vec{f_2} = (-3, 5, -4)^T, \vec{f_3} = (0, -1, 1)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -4, -3)^T, \vec{f_2} = (-16, -25, 12)^T, \vec{f_3} = (3, 0, 4)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 99 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -3$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_3 = -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -6 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 + x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 - 10x_3 + 3x_4 + x_5 = -14 \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + 8x_5 = 8 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ -4x - 3y + 5z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -7 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & -3 & -5 & 2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 8 & 9 & -5 \\ -11 & -2 & -7 & p & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, -4, -9) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 & -12 \\ 36 & 15 & 48 \\ -6 & -3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (-4, 0, 3)^T, \vec{f_3} = (1, -2, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 1, -2)^T, \vec{f_2} = (-3, 9, 6)^T, \vec{f_3} = (4, 2, -1)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 100 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & -4 & -4 \\ -3 & 5 & -5 & -4 \\ -6 & 8 & -9 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -2$ и $k_1 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -10 \\ -3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ -6x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -5 \\ +3x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = 1 \\ +4y + z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & p \\ -1 & -5 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (-x_1 - 6x_2 - 6x_3, -4x_1 - 7x_2 - 8x_3, +4x_1 + 9x_2 + 10x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 12 \\ -15 & -3 & -18 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 5, 4)^T$, $\vec{f_2} = (-5, -3, -6)^T$, $\vec{f_3} = (2, 4, 3)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, -3, 2)^T$, $\vec{f_2} = (5, 17, 18)^T$, $\vec{f_3} = (-8, -4, 6)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 101 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 5 & -5 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 3$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & -2\,x_4 & = & 4 \\ -2\,x_1 & +\,x_2 & -2\,x_3 & +\,x_4 & = & -4 \\ 6\,x_1 & -4\,x_2 & +5\,x_3 & -5\,x_4 & = & 23 \\ -4\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & +3\,x_4 & = & -10 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +2\,x_2 & -\,x_3 & & -3\,x_5 & = & -2 \\ & +\,x_2 & -\,x_3 & +\,x_4 & +2\,x_5 & = & 4 \\ -3\,x_1 & -3\,x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & +2\,x_5 & = & -8 \\ -2\,x_1 & -\,x_2 & & +\,x_4 & +5\,x_5 & = & 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & -\,x_2 & +2\,x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2\,x_2 & & +3\,x_4 & = & 0 \\ -3\,x_1 & +\,x_2 & +4\,x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \\ & -3\,x_2 & +2\,x_3 & +8\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -\,x & -\,y & +2\,z & = & -1 \\ x & -2\,y & & = & 0 \\ & -2\,y & +\,z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & -5 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & p \\ 5 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, -2, 8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (-5, 7, 4)^T, \vec{f_3} = (2, -2, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -4, -3)^T, \vec{f_2} = (19, 22, -4)^T, \vec{f_3} = (2, -1, 4)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 102 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_4 = 2$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +2\,x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -7 \\ & +5\,x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 20 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & & = & 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2\,x_2 & -2\,x_3 & -2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 19 \\ x_1 & & -4\,x_3 & -3\,x_4 & -2\,x_5 & = & 19 \\ -x_1 & -4\,x_2 & -8\,x_3 & -7\,x_4 & -6\,x_5 & = & 57 \\ -2\,x_1 & -2\,x_2 & +2\,x_3 & +x_4 & & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2\,x_3 & -3\,x_4 & = & 0 \\ 3\,x_1 & -2\,x_2 & +4\,x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 & +3\,x_3 & +5\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & -4\,x_2 & +8\,x_3 & +11\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & +4\,x_2 & -7\,x_3 & -10\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & +y & -2\,z & = & 1 \\ 3\,x & -2\,y & +4\,z & = & 0 \\ 2\,x & -2\,y & +3\,z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & 2 & -4 & -5 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & -2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -8 & -15 \\ -2 & -4 & 2 & p & 15 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, -4, 2) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -19 & 7 & 25 \\ 50 & -12 & -55 \\ -28 & 8 & 33 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (-3, -3, 4)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, 3)^T$ и $\vec{a} = (2, 0, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (1, 2, 0)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 103 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} & -x_2 & & -x_4 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & & = & 8 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & -5 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -2 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -11 \\ 2x_1 & & -x_3 & -2x_4 & = & -2 \\ & +x_2 & & -3x_4 & = & -5 \\ 5x_1 & & -3x_3 & -x_4 & = & 9 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & & -x_3 & -x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & & +8x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 1 \\ -2x & -4y & +z & = & 2 \\ -3x & & +2z & = & 1 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 8 \\ -5 & 7 & 4 & p \\ 0 & -5 & 1 & 12 \\ -4 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (21x_1 - 6x_2 + 24x_3, -40x_1 + 7x_2 - 40x_3, -32x_1 + 8x_2 - 35x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ -12 & -2 & 20 \\ -12 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, -2)^T, \vec{f_2} = (0, 1, 1)^T, \vec{f_3} = (2, -1, -1)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-3, -2, -1)^T, \vec{f_2} = (2, 6, -18)^T, \vec{f_3} = (-6, 8, 2)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 104 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -2 \\ -4 & -4 & 6 & 3 \\ -4 & -5 & 3 & 3 \\ -4 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 4 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_4 = -1$ и $k_2 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & -2\,x_4 & = & -6 \\ -4\,x_1 & -4\,x_2 & +6\,x_3 & +3\,x_4 & = & 5 \\ -4\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & +3\,x_4 & = & 7 \\ -4\,x_1 & -5\,x_2 & +4\,x_3 & +3\,x_4 & = & 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\,x_1 & +2\,x_2 & -4\,x_3 & +3\,x_4 & = & -16 \\ 4\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & -2\,x_4 & = & 14 \\ 5\,x_1 & -7\,x_2 & +7\,x_3 & -5\,x_4 & = & 30 \\ 3\,x_1 & -3\,x_2 & -\,x_3 & +\,x_4 & = & -2 \\ -3\,x_1 & +3\,x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & = & 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & -3\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & +5\,x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & +6\,x_2 & -7\,x_3 & +3\,x_4 & -8\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & -5\,x_2 & +6\,x_3 & -3\,x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +4\,x_2 & -4\,x_3 & +2\,x_4 & -4\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x & & +2\,z & = & 1 \\ 2\,x & & +\,z & = & 2 \\ -2\,x & +\,y & -\,z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & p \\ 4 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, -2, -8) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 54 & 20 & -28 \\ -24 & -10 & 12 \\ 86 & 31 & -45 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (3, 3, -4)^T, \vec{f_3} = (-3, -2, 4)^T$ и $\vec{a} = (-1, 1, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, 0)^T, \vec{f_2} = (0, 0, 5)^T, \vec{f_3} = (-2, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, -3, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 105 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 3$ и $k_3 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3\,x_1 & & -x_3 & +2\,x_4 & = & -3 \\ -5\,x_1 & +3\,x_2 & +2\,x_3 & +4\,x_4 & = & -7 \\ -2\,x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -2 \\ 2\,x_1 & +x_2 & +2\,x_3 & -x_4 & = & 1 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -5\,x_2 & -3\,x_3 & & = & -24 \\ 3\,x_1 & +8\,x_2 & +5\,x_3 & +x_4 & = & 37 \\ 2\,x_1 & +6\,x_2 & +4\,x_3 & -4\,x_4 & = & 24 \\ 5\,x_1 & +18\,x_2 & +11\,x_3 & +x_4 & = & 85 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2\,x_2 & -2\,x_3 & +x_4 & +4\,x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & -2\,x_4 & -7\,x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & +3\,x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +5\,x_2 & +4\,x_3 & -4\,x_4 & -15\,x_5 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +5\,x_2 & +6\,x_3 & +2\,x_4 & +5\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & +2\,y & & = & 2 \\ 4\,x & +y & -2\,z & = & -1 \\ -3\,x & -y & +z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} & 3 & 3 & -3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & -5 & 1 & 3 \\ 9 & 5 & -8 & -2 & 6 \\ 14 & 8 & -13 & p & 9 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 7, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 8 & -10 & -20 \\ -5 & 3 & 10 \\ 5 & -5 & -12 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (6, -4, 5)^T, \vec{f_2} = (-2, 1, -1)^T, \vec{f_3} = (-2, 0, -1)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, 1)^T, \vec{f_2} = (2, -2, -2)^T, \vec{f_3} = (0, -2, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 0, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 106 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_1 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ -x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -10 \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 10x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 13x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_5 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 16x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ 4x - 8y + 3z = -3 \\ -2x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -7 \\ 2 & -7 & 3 & p \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (7x_1 + 3x_2 - 6x_3, -6x_1 - 4x_2 + 6x_3, +12x_1 + 4x_2 - 9x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -34 & -24 & -48 \\ -4 & 0 & -6 \\ 26 & 17 & 37 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, 1)^T, \vec{f_2} = (1, -1, 0)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (-4, -3, -3)^T, \vec{f_3} = (-3, 2, 2)^T$ и $\vec{a} = (3, -1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 107 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 1 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_1 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\quad -x_2 + 3x_3 - x_4 = -13 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 11 \\ x_1 \quad\quad - 3x_3 + 2x_4 = 18 \\ x_1 \quad\quad - 4x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = 3 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ \quad\quad - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ \quad\quad + x_2 \quad\quad + 3x_4 + 6x_5 = -3 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x + 2y \quad\quad = -1 \\ -x - 4y \quad\quad = 1 \\ \quad\quad + y + z = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & p \\ -6 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-9, 2, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -14 & 10 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, -3, -3)^T, \vec{f_2} = (2, 1, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 1, -3)^T, \vec{f_2} = (6, -3, -5)^T, \vec{f_3} = (-1, -2, 0)^T$ и $\vec{a} = (2, -1, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 108 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_2 = -1$ и $k_4 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & +4\,x_2 & +x_3 & -3\,x_4 & = & 26 \\ -\,x_1 & +4\,x_2 & & -2\,x_4 & = & 20 \\ 2\,x_1 & -4\,x_2 & & +3\,x_4 & = & -23 \\ x_1 & +x_2 & -2\,x_3 & & = & -4 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & +x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & -5 \\ 3\,x_1 & -4\,x_2 & +3\,x_3 & -2\,x_4 & -2\,x_5 & = & 18 \\ 3\,x_1 & -5\,x_2 & +3\,x_3 & -3\,x_4 & -3\,x_5 & = & 23 \\ -6\,x_1 & +9\,x_2 & -6\,x_3 & +5\,x_4 & +5\,x_5 & = & -41 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ & +6\,x_2 & -x_3 & +14\,x_4 & = & 0 \\ -\,x_1 & -2\,x_2 & & -6\,x_4 & = & 0 \\ -4\,x_1 & +4\,x_2 & -3\,x_3 & +6\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & +y & +z & = & 2 \\ & +4\,y & -z & = & -1 \\ -\,x & -2\,y & & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & p & -5 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 4, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (3, 3, 0)^T, \vec{f_3} = (1, 0, -2)^T$ и $\vec{a} = (-2, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -2, 1)^T, \vec{f_2} = (8, 10, 4)^T, \vec{f_3} = (-4, 0, 8)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 109 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 4 & -3 \\ -2 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 4 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_4 = 2$ и $k_1 = 1$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -10 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -8 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -7 \\ 10x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 13 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x - z = -3 \\ +y - z = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & p \\ -5 & 0 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (19x_1 - 18x_2 - 6x_3, 12x_1 - 11x_2 - 4x_3, +24x_1 - 24x_2 - 7x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -19 & 10 & 10 \\ -20 & 11 & 10 \\ -24 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-2, 3, 1)^T, \vec{f_2} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, 0, 2)^T$ и $\vec{a} = (2, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 1, 0)^T, \vec{f_2} = (-1, 1, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 0, 1)^T$ и $\vec{a} = (3, -1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 110 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 2 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 1 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_1 = 1$ и $k_4 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & -4x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -11 \\ -5x_1 & +6x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & & = & -6 \\ 5x_1 & -5x_2 & -5x_3 & +2x_4 & = & -13 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = & -1 \\ -4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & -4x_5 & = & 18 \\ 5x_1 & -x_2 & -3x_3 & +x_4 & +6x_5 & = & 2 \\ -10x_1 & -2x_2 & +7x_3 & -7x_4 & -11x_5 & = & 37 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & & = & 0 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & & +7x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ -9x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +11x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z & = & -1 \\ -x & +y & +z & = & 1 \\ 4x & +3y & +2z & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & p \\ -1 & 2 & -5 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (5, 2, -9) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -14 & 3 & 9 \\ -20 & 3 & 15 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -4, -1)^T, \vec{f_2} = (2, -6, -1)^T, \vec{f_3} = (1, -3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -1, -2)^T, \vec{f_2} = (-9, 21, -6)^T, \vec{f_3} = (8, 2, -5)^T$ и $\vec{a} = (-2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 111 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 4;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_3 = -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -11 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 11 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 4 \\ -14x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 - 9x_5 = 26 \\ 3x_1 - 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \\ -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 18 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ 2x = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & -5 & -3 & -3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 3 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 8 & p & -1 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, 7, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 14 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -4, 1)^T, \vec{f_2} = (-2, 7, -1)^T, \vec{f_3} = (-1, 3, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -1, 2)^T, \vec{f_2} = (-15, 10, 5)^T, \vec{f_3} = (10, 12, 6)^T$ и $\vec{a} = (-2, 1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 112 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +4x_4 & = & 15 \\ 2x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = & 6 \\ & -3x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -4x_2 & +4x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -30 \\ 3x_1 & +8x_2 & -5x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = & 44 \\ 2x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 39 \\ & -3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -23 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & +10x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x & & -z & = & 2 \\ & +3y & -z & = & 0 \\ -x & +y & & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -4 & p \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ -9 & -6 & 8 & -13 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - 4x_3, -11x_2 - 12x_3, +8x_2 + 9x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, -1, -1)^T, \vec{f_2} = (1, -1, 4)^T, \vec{f_3} = (1, 0, -2)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -5, -3)^T, \vec{f_2} = (38, 40, -16)^T, \vec{f_3} = (8, -2, 14)^T$ и $\vec{a} = (-1, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 113 .

1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 2;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 1 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3=-3$ и $k_2=2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C)=-det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -14 \\ + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 11 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = -5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \\ + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 6x_4 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 - x_3 - 16x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x - 2z = 2 \\ -4x + 4y - 5z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (0, 4, 1) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -10 \\ -14 & 5 & 10 \\ 12 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, -2, 2)^T, \vec{f_2} = (-4, 0, 5)^T, \vec{f_3} = (-2, -3, 3)^T$ и $\vec{a} = (-2, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (-1, 2, -2)^T, \vec{f_2} = (-2, 4, 5)^T, \vec{f_3} = (2, 1, 0)^T$ и $\vec{a} = (-3, -2, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 114 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 3 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 1$ и $k_3 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -5 \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ +3x_2 + 2x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -7 \\ -x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 13 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 5x_5 = -24 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 29x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 26x_4 = 0 \\ -7x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 49x_4 = 0 \\ 8x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 55x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x - y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & -4 & 5 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 5 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & 9 & -7 & 2 \\ -3 & -1 & -1 & p & 6 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-7, 5, -3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 1, 1)^T$, $\vec{f_2} = (1, 3, 2)^T$, $\vec{f_3} = (-1, -2, -2)^T$ и $\vec{a} = (1, -1, 0)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 0, 2)^T$, $\vec{f_2} = (4, 39, -6)^T$, $\vec{f_3} = (-6, 2, 9)^T$ и $\vec{a} = (2, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 115 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = 1$ и $k_2 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & & +4\,x_3 & -2\,x_4 & = & -14 \\ -\,x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & & = & -2 \\ -\,x_1 & +2\,x_2 & -6\,x_3 & & = & 4 \\ 2\,x_1 & -\,x_2 & +3\,x_3 & -\,x_4 & = & -7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & -4\,x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 0 \\ -5\,x_1 & +4\,x_2 & -4\,x_3 & +2\,x_4 & = & 17 \\ -2\,x_1 & +3\,x_2 & -\,x_3 & -4\,x_4 & = & -5 \\ -2\,x_1 & & -2\,x_3 & +5\,x_4 & = & 17 \\ 7\,x_1 & -7\,x_2 & +5\,x_3 & +2\,x_4 & = & -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2\,x_1 & +\,x_2 & -\,x_3 & -3\,x_4 & +8\,x_5 & = & 0 \\ x_1 & +\,x_2 & & +\,x_4 & +2\,x_5 & = & 0 \\ -\,x_1 & & & +\,x_4 & -3\,x_5 & = & 0 \\ -3\,x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & -5\,x_4 & +18\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & +\,y & -\,z & = & -2 \\ -\,x & +\,y & & = & 0 \\ x & & & = & -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 & p \\ -2 & -2 & 3 & -12 \\ -1 & -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2, 4x_1 - 3x_2, +4x_1 - 4x_2 + x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (6, -5, -5)^T, \vec{f_2} = (-2, 4, 3)^T, \vec{f_3} = (1, 0, 0)^T$ и $\vec{a} = (-1, -3, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (4, -5, -3)^T, \vec{f_2} = (-24, -45, 43)^T, \vec{f_3} = (7, 2, 6)^T$ и $\vec{a} = (-2, -2, 2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 116 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 4 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_2 = -3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & -8 \\ & -5x_2 & & +x_4 & = & -12 \\ 4x_1 & +5x_2 & -4x_3 & -5x_4 & = & 20 \\ -2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & -4x_2 & -3x_3 & +3x_4 & = & -19 \\ -7x_1 & -10x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -13 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & -5x_4 & = & 22 \\ -x_1 & -2x_2 & +7x_3 & -7x_4 & = & 25 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & -5x_2 & -x_3 & +2x_4 & +10x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & +9x_2 & +3x_3 & -5x_4 & -15x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -6x_2 & & +3x_4 & +16x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -6x_2 & -2x_3 & +3x_4 & +10x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -4x & & -2z & = & 2 \\ -6x & +3y & -4z & = & -2 \\ 5x & -y & +3z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & p \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -12 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 5, 3) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 10 \\ -4 & -3 & -5 \\ -20 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, 2)^T, \vec{f_2} = (-4, 0, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, -3, -1)^T$ и $\vec{a} = (-1, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (5, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, 1, 2)^T$ и $\vec{a} = (1, 2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 117 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 3 матрицы A линейной комбинацией строк номер 2 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 3$ и $k_2 = 2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} & +x_2 & & +x_4 & = & 4 \\ -2\,x_1 & & & +3\,x_4 & = & 9 \\ -2\,x_1 & -x_2 & -x_3 & +3\,x_4 & = & 8 \\ -x_1 & & -x_3 & +2\,x_4 & = & 7 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +3\,x_2 & +x_3 & +2\,x_4 & = & 9 \\ -x_1 & -3\,x_2 & & -3\,x_4 & = & -12 \\ 3\,x_1 & +4\,x_2 & +2\,x_3 & -3\,x_4 & = & -1 \\ 3\,x_1 & +3\,x_2 & +2\,x_3 & +x_4 & = & 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\,x_1 & & -2\,x_3 & -x_4 & +14\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & & +3\,x_3 & +x_4 & -19\,x_5 & = & 0 \\ -4\,x_1 & -x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & -19\,x_5 & = & 0 \\ -10\,x_1 & & +7\,x_3 & +3\,x_4 & -47\,x_5 & = & 0 \\ 12\,x_1 & +2\,x_2 & -9\,x_3 & +x_4 & +57\,x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 2\,x & & -z & = & -1 \\ x & & & = & -2 \\ -3\,x & +y & +2\,z & = & -1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & -2 & -4 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -11 & -8 & 6 & p & 3 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-2, 0, -7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 14 & 3 & 9 \\ -14 & -3 & -12 \\ -10 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -3, 1)^T, \vec{f_2} = (-3, -2, 4)^T, \vec{f_3} = (-1, -2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-1, -3, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (1, 2, -1)^T, \vec{f_2} = (-26, 8, -10)^T, \vec{f_3} = (-4, 12, 20)^T$ и $\vec{a} = (-3, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 118 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 3 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 3 и 2 матрицы A с коэффициентами $k_3 = -1$ и $k_2 = 3$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 & +4x_2 & & -2x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & -4x_2 & & +3x_4 & = & -8 \\ -3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -12 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & -6 \\ -5x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & 11 \\ -9x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -x_4 & = & 17 \\ 9x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +x_4 & = & -17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & & & -x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +4x_3 & & -9x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & +3x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & -x_2 & -4x_3 & -2x_4 & +4x_5 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} & & -z & = & 2 \\ -x & -3y & & = & 2 \\ x & +y & +2z & = & -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & -6 \\ 4 & -8 & -3 & p \\ 2 & 3 & 0 & -10 \\ -5 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ равен трём.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ действует по закону:

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = (50x_1 - 4x_2 + 36x_3, 48x_1 - 2x_2 + 36x_3, -65x_1 + 5x_2 - 47x_3),\ \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3.$$

1. Найти матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 5, -2)^T, \vec{f_2} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_3} = (2, 4, -1)^T$ и $\vec{a} = (1, -2, -1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -2)^T, \vec{f_2} = (10, 0, 0)^T, \vec{f_3} = (0, -8, -4)^T$ и $\vec{a} = (1, 0, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

* ТУСУР * ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА * ФВС *

Вариант № 119 .

1. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по столбцу номер 3;
b) Составить матрицу B, заменив строку номер 2 матрицы A линейной комбинацией строк номер 3 и 4 матрицы A с коэффициентами $k_3=-3$ и $k_4=2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C)=-det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = & 24 \\ -4x_1 & +3x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -20 \\ -4x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & = & -15 \\ 3x_1 & -x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & 16 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -x_4 & -2x_5 & = & -18 \\ & +2x_2 & +x_3 & & -3x_5 & = & 2 \\ x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -4x_4 & -4x_5 & = & -17 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} & -3x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -16x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -11x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +13x_2 & -6x_3 & -26x_4 & = & 0 \\ -7x_1 & -17x_2 & +10x_3 & +38x_4 & = & 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} -x & -3y & -2z & = & -2 \\ -3x & -6y & -4z & = & -2 \\ & -2y & -z & = & 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix}$ минимален.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{c}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (4, 7, 7) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (3, 4, -5)^T, \vec{f_2} = (1, 3, -3)^T, \vec{f_3} = (-2, -3, 4)^T$ и $\vec{a} = (2, -2, -2)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (2, 0, 1)^T, \vec{f_2} = (-1, 5, 2)^T, \vec{f_3} = (-2, -2, 4)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, -3)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.

Вариант № 120 .

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Записать разложение $det(A)$ по строке номер 1;
b) Составить матрицу B, заменив столбец номер 1 матрицы A линейной комбинацией столбцов номер 2 и 1 матрицы A с коэффициентами $k_2 = 2$ и $k_1 = -2$;
c) Вычислить $det(A)$, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце. Используя только свойства определителя матрицы, установить чему равен $det(B)$;
d) Матрица C получена из матрицы A перестановкой каких-либо двух строк или столбцов. Непосредственным вычислением убедиться, что $det(C) = -det(A)$.

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\; -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -14 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет единственное решение;
b) Неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
c) Решить систему методом исключения (Гаусса).

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -16 \\ -2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_5 = -18 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 14 \end{cases}$$

a) Доказать, что система совместна;
Чему равен ранг расширенной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти какое-либо частное решение системы.

4. Дана система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 14x_4 = 0 \\ -5x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 34x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
Чему равен ранг основной матрицы системы?
b) Найти общее решение системы;
c) Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

5. Доказать, что система

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -5x - y + 4z = -3 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найти его матричным способом.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-2} & 1 & 2 & -4 \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-1} & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 9 & p & 2 \end{pmatrix}$. При каком значении параметра p, выделенный жирным шрифтом минор $D\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A является базисным.

8. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован декартов базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \longrightarrow \mathbf{V}_3$ определяется формулой:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = [\vec{c}, \vec{x}], \forall \vec{x} \in \mathbf{V}_3,$$

где $\vec{c} = (-4, 0, 5) \in \mathbf{V}_3$ фиксирован.
1. Найти матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ в декартовом базисе $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. Сделать проверку.

9. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Сделать проверку.

10. В линейном пространстве $\mathbf{L}_3$ фиксирован базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, -2, -2)^T, \vec{f_2} = (-2, 1, -4)^T, \vec{f_3} = (-1, -1, -3)^T$ и $\vec{a} = (2, 1, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый базис в линейном пространстве $\mathbf{L}_3$;
2. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
3. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ и наоборот;
4. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$.

11. В линейном пространстве $\mathbf{V}_3$ фиксирован нормальный базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и даны векторы:
$\vec{f_1} = (0, 1, -1)^T, \vec{f_2} = (-4, -3, -3)^T, \vec{f_3} = (-3, 2, 2)^T$ и $\vec{a} = (-3, 2, 1)^T$.
1. Доказать, что векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ можно принять за новый ортогональный базис в линейном пространстве $\mathbf{V}_3$;
2. Преобразовать базис $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ в ортонормированный базис $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$;
3. Записать матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к базису $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот от базиса $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Сделать проверку;
4. Выразить координаты вектора, заданного в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, через координаты этого же вектора в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ и наоборот;
5. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$.